le BDE Caliente est heureux de vous présenter sa

Pêche aux Modules

Edition 2008-2009

Pour les EI1

TELECOM SudParis

UV Mathématiques

MA - AD -AN

Caliente

GROUPE DES ÉCOLES DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

CONTRÔLE DE CONNAISSANCES

MODULE : Mathématiques Appliquées — CODE : MA11
DURÉE : 3 heures — DATE : 12 Janvier 2007
DOCUMENTS AUTORISÉS : Polys de Bayen-Margaria — COORDINATEUR : Arif Mard

---

EXERCICE 1

Soit $\mathcal{H} = L^2_{\mathbb{R}}([0, 2\pi])$ l'espace de Hilbert réel des fonctions de carré intégrable, et soit A l'opérateur linéaire défini pour tout $x \in \mathcal{H}$ par

$$(Ax)(t) = \int_0^{2\pi} \sin(t+s)x(s)ds.$$

1. Montrer que A est un opérateur auto-adjoint.

2. On représente une fonction $x \in \mathcal{H}$ par sa série de Fourier:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

   Donner l'expression de Ax.

3. L'espace $\mathcal{H}$ étant muni de la norme habituelle, calculer la norme de A définie par:

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2_{L^2}.$$

EXERCICE 2

Calculer les limites pour $n \longrightarrow +\infty$ des distributions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1.
$$T_n = \frac{n}{1+n^2x^2}$$

2.
$$S_n = \frac{n^3 x}{(1+n^2x^2)^2}$$

3.
$$U_n = \frac{n^3 \sin x}{(1+n^2x^2)^2}.$$

EXERCICE 3

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On va calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par:
$$f(x) := \frac{1}{a^2+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Pour cela on intégrera la fonction F de la variable complexe z définie par:
$$F(z) := \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{a^2+z^2} \qquad \nu \in \mathbb{R},$$
sur un contour convenable. En déduire la transformée de Fourier de f.

2. Calculer, en s'aidant de la question précédente, la transformée de Fourier de la fonction g définie par:
$$g(x) := \left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)^2, \qquad a \in \mathbb{R}_+^*.$$

EXERCICE 4

Dans un circuit électrique passif alimenté par une source de tension, la charge électrique obéit à l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$q''(t) + 2q'(t) - 5q(t) = e^{-t}\sin(2t).$$

Sachant que $q(0^+) = 0$, $q'(0^+) = 1$, trouver la charge électrique en fonction de t en utilisant la transformée de Laplace.

Exercice I:

1) $(Ax)(t) = \int_0^{2\pi} \sin(t+s)\, x(s)\, ds$

$\langle Ax, y\rangle \overset{?}{=} \langle x, Ay\rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$

$\langle Ax, y\rangle = \int_0^{2\pi} (Ax)(t)\, y(t)\, dt$

$= \int_0^{2\pi} dt \left(\int_0^{2\pi} ds \sin(t+s)\, x(s)\, ds \right) y(t)$

$= \int_0^{2\pi} ds\, x(s) \int_0^{2\pi} dt \sin(s+t)\, y(t)$

$= \int_0^{2\pi} ds\, x(s)(Ay)(s) = \langle x, Ay\rangle .$

2) $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$

$(Ax)(t) = \int_0^{2\pi} \sin(t+s) \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ns - b_n \sin ns) \right\} ds$

$= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \sin(t+s)\, ds + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_0^{2\pi} \sin(t+s) \cos ns\, ds + b_n \int_0^{2\pi} \sin(t+s) \sin ns\, ds \right.$

$\sin(t+s)\cos ns = ?$

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$

$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

$$\boxed{\sin(t+s)\cos ns = \frac{1}{2}\left[\sin(t+(n+1)s) + \sin(t+(1-n)s)\right]}$$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$$\Rightarrow \sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin(t+s)\sin ns = \frac{1}{2}\left[\cos(t+(1-n)s) - \cos(t+(1+n)s)\right]$$

$\underline{n\neq 1}$:

$$\int_0^{2\pi} \sin(t+s)\cos ns\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(t+(1+n)s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(t+(1-n)s)\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{-\cos(t+(1+n)s)}{1+n}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{-\cos(t+(1-n)s)}{1-n}\right]_0^{2\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\cos t - \cos(t+(n+1)2\pi)}{1+n} \right\} = 0 .$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(t+s)\sin ns\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(t+(1-n)s)\, ds - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(t+(1+n)s)\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(t+(1-n)s)}{1-n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(t+(1+n)s)}{1+n} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\sin t + \sin(t+(1-n)2\pi)}{1-n} \right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin t + \sin(t+(1+n)2\pi)}{1+n} \right]$$

$$= 0$$

$$\therefore \boxed{\int_0^{2\pi} \sin(t+s)\cos ns\, ds = 0 = \int_0^{2\pi} \sin(t+s)\sin ns\, ds \quad \forall n \neq 1}$$

$\underline{n=1:}$ $\quad \sin(t+s)\sin s = \frac{1}{2}\left[\cos t - \cos(t+2s)\right]$

$$\sin(t+s)\cos s = \frac{1}{2}\left[\sin t + \sin(t+2s)\right]$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(t+s)\cos s\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin t\,ds + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(t+2s)\,ds$$

$$= \pi \sin t + 0 ;$$

d'une façon similaire:

$$\int_0^{2\pi} \sin(t+s)\sin s\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos t\,ds - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(t+2s)\,ds$$

$$= \pi \cos t - 0 .$$

Il vient donc:

$$\boxed{(Ax)(t) = \pi\left[a_1 \sin t + b_1 \cos t\right]}$$

3) $\|A\|^2 := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2$

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle$$

$$= \int_0^{2\pi} |Ax(t)|^2 dt = \pi^2 \int_0^{2\pi} \left[a_1 \sin t + b_1 \cos t\right]^2 dt$$

$$= \pi^2 a_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt + \pi^2 a_1 b_1 \int_0^{2\pi} \sin 2t\,dt + \pi^2 b_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

$$\Rightarrow \quad \|Ax\|^2 = \pi^3 (a_1^2 + b_1^2).$$

Nous cherchons la valeur maximum de $a_1^2 + b_1^2$ lorsque $\|x\|^2 = 1$. Or,

$$\|x\|^2 = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + (a_1^2 + b_1^2) + \cdots + (a_n^2 + b_n^2) + \cdots \right\} = 1 ;$$

nous en déduisons que $a_1^2 + b_1^2$ est max. lorsque les autres termes de la série de Fourier sont nuls. Nous obtenons donc:

$$\pi (a_1^2 + b_1^2) = 1 \quad \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 = \frac{1}{\pi}$$

Il vient donc :

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \pi^3 \cdot \frac{1}{\pi} = \pi^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\|A\| = \pi}$$

—— o ——

Exercice II :

Calculer les limites pour $n \to +\infty$ des distributions suivantes sur $\mathbb{R}$:

(1) $$T_n = \frac{n}{1+n^2x^2}$$

(2) $$S_n = \frac{n^3 x}{(1+n^2x^2)^2}$$

(3) $$U_n = \frac{n^3 \sin x}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Correction : $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, on va noter

$$\|\varphi\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|.$$

(1) $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2} \varphi(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(u/n)}{1+u^2}\, du.$$

Or, nous avons

$\left|\frac{\varphi(u/n)}{1+u^2}\right| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \frac{1}{1+u^2}$, qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $n \to \infty$, $\varphi(u/n) \longrightarrow \varphi(0)$ pour tout u. Le TCD de Lebesgue implique alors :

$$\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{1+u^2} = \pi \varphi(0)$$

Donc $\boxed{T_n \xrightarrow[\mathcal{D}']{n \to \infty} \pi \delta}$

(2) On remarque que $S_n = -\frac{1}{2} T_n'$. Puisque la dérivation des distributions est continue, on en déduit que $S_n \to -\frac{\pi}{2} \delta'$:

$$\boxed{S_n \xrightarrow[\mathcal{D}']{n \to \infty} S = -\frac{\pi}{2} \delta'}$$

(3) Nous pouvons écrire, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$:

$$\langle U_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{n^3 x}{(1+n^2x^2)^2} \cdot \frac{\sin x}{x} \varphi(x) \, dx,$$

où $\frac{\sin x}{x} \in \mathcal{C}^\infty$, et donc

$$\psi(x) := \frac{\sin x}{x}\varphi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Alors,

$$\langle U_n, \varphi \rangle = \langle S_n, \psi \rangle, \text{ et on en déduit}$$

que

$$\langle U_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle S, \psi \rangle = \langle -\frac{\pi}{2}\delta', \psi \rangle$$

$$= + \frac{\pi}{2}\langle \delta, \psi' \rangle$$

$$= + \frac{\pi}{2}\langle \delta, \varphi' \rangle$$

$$= - \frac{\pi}{2}\langle \delta', \varphi \rangle$$

soit $U_n \xrightarrow[\mathcal{D}']{n \uparrow \infty} U = -\frac{\pi}{2}\delta'$,

où nous avons utilisé :

a) $\frac{\sin x}{x}$ se prolonge par 1 en 0, et

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\Big|_{x=0} = 0$.

Exercice III :

1) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On va calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour cela on intégrera la fonction de la variable complexe

$$F(z) = \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{a^2+z^2} \quad \nu \in \mathbb{R},$$

sur un contour convenable. En déduire la transformée de Fourier de f.

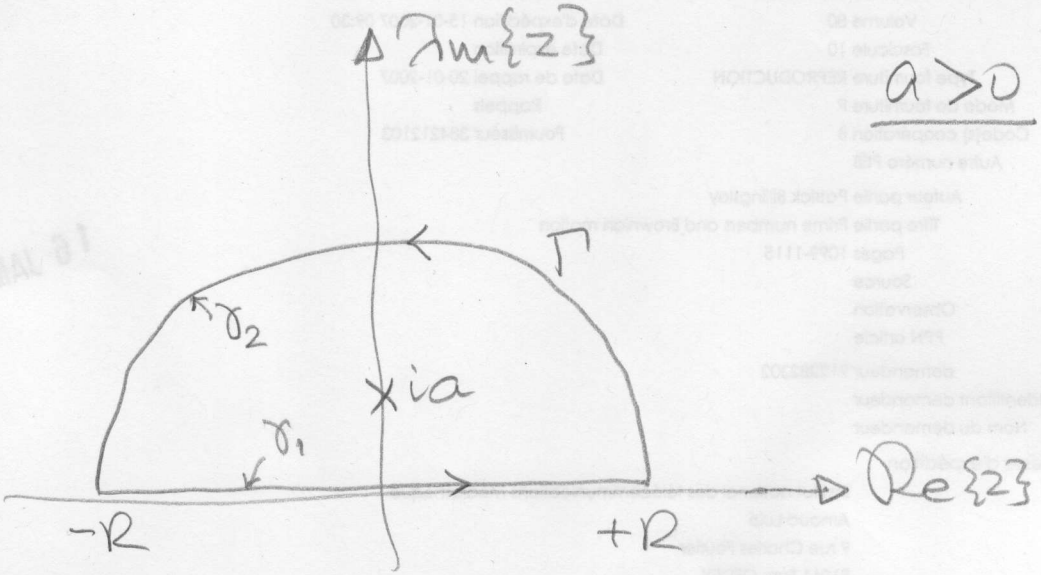
2) Calculer, en s'aidant de la question précédente, la transformée de Fourier de la fonction

$$g(x) = \left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)^2, \quad a \in \mathbb{R}_+^*.$$

— o —

EXERCICE III : $F(z) = \dfrac{\exp(-i2\pi\nu z)}{a^2+z^2}$ $\nu \in \mathbb{R}$.

1) $F(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{\pm ia\}$, où $\pm ia$ sont des pôles simples. Considérons l'intégrale de $F(z)$ sur le contour Γ suivant :



Le théorème de résidus $\Rightarrow$ $(R > a)$

$$\oint_\Gamma \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{z^2+a^2}\,dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}\{F; ia\}$$

$$\mathrm{Res}\{F; ia\} = \lim_{z\to ia}(z-ia)F(z)$$

$$= \lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{\exp(-i2\pi\nu z)}{(z-ia)(z+ia)}$$

$$= \frac{\exp(2\pi a\nu)}{2ia}$$

Donc :

$$\oint_\Gamma \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{z^2+a^2}\,dz = \frac{2\pi i \cdot e^{2\pi a\nu}}{2ia}$$

$$= \frac{\pi}{a} e^{2\pi a\nu}.$$

Or, $\oint_\Gamma \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{z^2+a^2}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{z^2+a^2}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{z^2+a^2}\,dz$

Intégrale sur γ_1 : $z = x$, $dz = dx$.

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{z^2+a^2}\,dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{-i2\pi\nu x}}{x^2+a^2}\,dx$$

Intégrale sur γ_2 : $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$.

$dz = iRe^{i\theta}d\theta$

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{z^2+a^2}\,dz = \int_0^\pi \frac{e^{-i2\pi\nu R(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R^2e^{i2\theta}+a^2} iRe^{i\theta}d\theta$$

Or,

$$\left| \int_0^\pi \frac{e^{-i2\pi\nu R(\cos\theta+i\sin\theta)}}{R^2e^{i2\theta}+a^2} iRe^{i\theta}d\theta \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{2\pi\nu R\sin\theta}}{|R^2e^{i2\theta}+a^2|} R\,d\theta$$

Supposons $\nu<0$: Alors l'intégrande $\to 0$ quand $R \to \infty$, et nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i2\pi\nu x}}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{a} e^{2\pi\nu a}$$

On conclut donc : $\hat{f}(\nu) = \frac{\pi}{a} e^{2\pi\nu a}$ $\nu<0$.

Comme $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ est une fonction paire, sa TF l'est aussi, & on en déduit que

$$\hat{f}(\nu) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi\nu a} \qquad \nu>0.$$

Finalement :

$$\boxed{\hat{f}(\nu) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\nu|}} \quad \nu\in\mathbb{R}.$$

2) $\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^2 = f(x) \cdot f(x) = g(x)$

$\hat{g}(\nu) = (\hat{f} * \hat{f})(\nu)$.

$$(\hat{f} * \hat{f})(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu-\xi)\,\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{\pi^2}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi a|\nu-\xi|}\, e^{-2\pi a|\xi|}\, d\xi$$

Soit $\nu > 0$.

$$(\hat{f} * \hat{f})(\nu) = \frac{\pi^2}{a^2} \int_{-\infty}^{\nu} e^{-2\pi a(\nu-\xi)}\, e^{-2\pi a|\xi|}\, d\xi$$

$$+ \frac{\pi^2}{a^2} \int_{\nu}^{+\infty} e^{+2\pi a(\nu-\xi)}\, e^{-2\pi a|\xi|}\, d\xi$$

$$= \frac{\pi^2}{a^2} \int_{-\infty}^{0} e^{-2\pi a(\nu-\xi)}\, e^{+2\pi a\xi}\, d\xi + \frac{\pi^2}{a^2} \int_{0}^{\nu} e^{-2\pi a(\nu-\xi)}\, e^{-2\pi a\xi}\, d\xi$$

$$+ \frac{\pi^2}{a^2} \int_{\nu}^{+\infty} e^{2\pi a(\nu-\xi)}\, e^{-2\pi a\xi}\, d\xi$$

$$= \frac{\pi^2}{a^2} \int_{-\infty}^{0} e^{-2\pi a\nu} e^{+4\pi a\xi} d\xi$$

$$+ \frac{\pi^2}{a^2} e^{-2\pi a\nu} \int_{0}^{\nu} d\xi$$

$$+ \frac{\pi^2}{a^2} e^{2\pi a\nu} \int_{\nu}^{+\infty} e^{-4\pi a\xi} d\xi$$

$$= \frac{\pi^2}{a^2} e^{-2\pi a\nu} \left[\frac{e^{4\pi a\xi}}{4\pi a} \right]_{-\infty}^{0}$$

$$+ \frac{\pi^2}{a^2} e^{-2\pi a\nu} \cdot \nu$$

$$+ \frac{\pi^2}{a^2} e^{2\pi a\nu} \left[\frac{e^{-4\pi a\xi}}{-4\pi a} \right]_{\nu}^{\infty}$$

$$= \frac{\pi^2}{a^2} \frac{e^{-2\pi a\nu}}{4\pi a} + \frac{\pi^2}{a^2} \nu e^{-2\pi a\nu} + \frac{\pi^2}{a^2} e^{+2\pi a\nu} \frac{e^{-4\pi a\nu}}{4\pi a}$$

$$= \frac{\pi}{2a^3} e^{-2\pi a\nu} + \frac{\pi^2}{a^2} \nu e^{-2\pi a\nu}$$

$$= \frac{\pi^2}{a^3} \left[\frac{1}{2\pi} + a\nu \right] e^{-2\pi a\nu}$$

Par la parité de f, $\hat{f}$ doit être paire aussi.
On en déduit donc :

$$\hat{g}(\nu) = \frac{\pi^2}{a^3}\left[\frac{1}{2\pi} + a|\nu|\right] e^{-2\pi a|\nu|}$$

$$= \frac{\pi}{2a^3}\left[1 + 2\pi a|\nu|\right] e^{-2\pi a|\nu|}$$

GROUPE DES ÉCOLES DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

CONTRÔLE DE CONNAISSANCES

MODULE : Mathématiques Appliquées — CODE : MA11
DURÉE : 3 heures — DATE : 30 Janvier 2006
DOCUMENTS AUTORISÉS : Polys de cours — COORDINATEUR : Arif Mardin

---

EXERCICE 1

Soit $\alpha \in]0,1[$, et $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le théorème des résidus, calculer l'intégrale:

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{(x+1)^n}$$

(On pourra distinguer les cas $n = 1$ et $n \geq 2$).

EXERCICE 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles de carré intégrable, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)dx.$$

On considère l'opérateur U défini $\forall f \in E$ par:

$$(Uf)(x) = \begin{cases} f(x-1), & \text{si } x \geq 1; \\ 0, & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que U est une isométrie.
2. Quel est l'adjoint U^* de U? Calculer l'opérateur U^*U.
3. Soit $V = UU^*$. Montrer que V est auto-adjoint et calculer V^2, puis V^n. Conclusion?

4. Calculer $Vf = UU^*f$ pour $f \in E$.

EXERCICE 3

On considère la suite de distributions (T_n) sur $\mathbb{R}$ définie par

$$T_n = \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus[-1/n,1/n]}(x)\frac{x}{|x|^3} + 2(\log n)\delta_0'.$$

Montrer que, au sens de la convergence des distributions, la suite (T_n) converge vers

$$-\frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{x}{|x|}\log|x|\Big) - 2\delta_0'.$$

EXERCICE 4

Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{1+x^2}.$$

(On pourra utiliser les propriétés du produit de convolution).Exprimer le résultat sous la forme de $ce^{-\frac{\nu^2}{2}}$ (c=const.) multiplié par uneintégrale du type

$$\int_0^\infty a(\eta)b(\nu\eta)d\eta.$$

CORRIGÉ DU CC DU 30/01/06

Exercice I: $\alpha \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\alpha}}{(x+1)^n} dx. \quad (7^{\text{ème}} \text{ type})$$

$n=1$:

$$(1 - e^{-i2\pi\alpha}) I = 2\pi i \, \text{Res}\left[\frac{z^{-\alpha}}{1+z}; -1\right]$$

On choisit la détermination $\text{Arg} z \in]0, 2\pi[$:

$$(-1)^{-\alpha} = e^{-\alpha \text{Log}(-1)} = e^{-\alpha[\text{Log}|-1| + i\pi]} = e^{-i\alpha\pi}.$$

$$\therefore \quad (1 - e^{-i2\alpha\pi}) I = 2\pi i \, e^{-i\alpha\pi}$$

$$e^{-i\alpha\pi}\left(e^{+i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}\right) I = 2\pi i \, e^{-i\alpha\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}}$$

$n \geq 2$: $\text{Res}\left[z^{-\alpha} \cdot \frac{1}{(1+z)^n}; -1\right]$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{(z+1)^n \cdot \frac{z^{-\alpha}}{(z+1)^n}\right\}\right]_{z=-1}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}(-\alpha)(-\alpha-1)(-\alpha-2)\cdots(-\alpha-n+2)\left[z^{-\alpha-n+1}\right]\Big|_{z=-1}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)(-1)^{-\alpha-(n-1)}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)\,e^{-i\pi(\alpha+n-1)}$$

$$= \frac{\cancel{(-1)^{n-1}}}{(n-1)!}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)\,\underbrace{e^{-i\pi(n-1)}}_{\cancel{(-1)^{n-1}}}\cdot e^{-i\pi\alpha}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)}{(n-1)!}e^{-i\pi\alpha}$$

$$\therefore \boxed{I = \frac{\pi\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)}{(n-1)!\sin\pi\alpha}} \quad \underline{\forall n \geq 2}$$

Exercice II :

1) $\forall f \in E$: $(Uf)(x) = \begin{cases} f(x-1) & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$$\|Uf\|^2 = \langle Uf, Uf \rangle = \int_0^{+\infty} |(Uf)(x)|^2 dx$$

$$= \int_1^{+\infty} |f(x-1)|^2 dx = \int_0^{+\infty} |f(u)|^2 du = \|f\|^2.$$

$\Leftrightarrow$ U est une isométrie.

2) $\forall f, g \in E$, on a :

$$\langle Uf, g \rangle = \langle f, U^* g \rangle$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\infty} (Uf)(x)\, g(x) dx = \int_1^{\infty} f(x-1)\, g(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} f(x) (U^* g)(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\infty} f(x)\, g(x+1) dx = \int_0^{\infty} f(x) (U^* g)(x) dx$$

$$\Leftrightarrow (U^* g)(x) = g(x+1).$$

$\forall f \in E$: $(Uf)(x) = f(x-1)$

$(U^*Uf)(x) = (U^*f)(x-1) = f(x)$

$\Rightarrow \underline{U^*U = \mathbb{1}}$,

Ce qui constitue un résultat général quand U est une isométrie, car:

$\forall f,g \in E$: $\langle Uf, Ug \rangle = \langle f, g \rangle$

$\Leftrightarrow \langle U^*Uf, g \rangle = \langle f, g \rangle$.

3) $V^* = (UU^*)^* = UU^* = V \Rightarrow V$ est <u>auto-adjt</u>

$V^2 = U\underbrace{U^*U}_{\mathbb{1}}U^* = UU^* = V$

$\Rightarrow V^3 = V^2 = V, \dots ; V^n = \dots = V$

$\Rightarrow V$ est idempotent.

4) $(Vf)(x) = (UU^*f)(x) = (Uf)(x+1)$

$$= \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \geq x \geq -1 \end{cases}$$

$(Vf)(x) = Y(x) f(x)$

Exercice III :

$$T_n := \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{1}{n},+\frac{1}{n}]}(x)\frac{x}{|x|^3} + 2\log n\,\delta_0'$$

$$\langle T_n, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{1}{n},+\frac{1}{n}]}(x)\frac{x}{|x|^3}\varphi(x)dx + 2\log n\langle \delta_0', \varphi\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{-\frac{1}{n}} \frac{x}{|x|^3}\varphi(x)dx + \int_{1/n}^{+\infty} \frac{x}{|x|^3}\varphi(x)dx - 2\log n\,\varphi'(0)$$

$$= +\int_{+\infty}^{\frac{1}{n}} \frac{x}{|x|^3}\varphi(-x)dx + \int_{1/n}^{+\infty} \frac{x}{|x|^3}\varphi(x)dx - 2\log n\,\varphi'(0)$$

$$= \int_{1/n}^{+\infty} \frac{1}{x^2}(\varphi(x)-\varphi(-x))dx - 2\log n\,\varphi'(0)$$

$$\varphi(x)-\varphi(-x) = u \qquad \frac{dx}{x^2} = dv$$

$$dx[\varphi'(x)+\varphi'(-x)] = du \qquad -\frac{1}{x} = v$$

$$= \left[\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{-x}\right]_{\frac{1}{n}}^{+\infty} + \int_{1/n}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)+\varphi'(-x)}{x}dx - 2\log n\,\varphi'(0)$$

$$= +n\left[\varphi(\tfrac{1}{n})-\varphi(-\tfrac{1}{n})\right] + \int_{1/n}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)+\varphi'(-x)}{x}dx - 2\log n\,\varphi'(0)$$

$$\varphi'(x) + \varphi'(-x) = u$$

$$[\varphi''(x) - \varphi''(-x)]dx = du \qquad \frac{dx}{x} = dv \quad \log x = v$$

$$\therefore \int_{1/n}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)+\varphi'(-x)}{x} dx = \left[(\varphi'(x)+\varphi'(-x))\log x\right]_{\frac{1}{n}}^{+\infty}$$

$$- \int_{1/n}^{+\infty} (\varphi''(x) - \varphi''(-x)) \log x \, dx$$

$$= -\left(\varphi'\left(\tfrac{1}{n}\right) + \varphi'\left(-\tfrac{1}{n}\right)\right)\log\tfrac{1}{n}$$

$$- \int_{1/n}^{+\infty} \varphi''(x)\log x\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \varphi''(-x)\log x\,dx$$

Considérons la deuxième intégrale :

$$\int_{1/n}^{+\infty} \varphi''(-x)\log x\,dx \qquad x \to -x$$

$$= -\int_{-\frac{1}{n}}^{-\infty} \varphi''(x)\log(-x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-1/n} \varphi''(x)\log|x|\,dx$$

$$\therefore \; -\left\{\int_{1/n}^{+\infty} \varphi''(x)\,\mathrm{Log}\,x\,dx - \int_{-\infty}^{-\frac{1}{n}} \varphi''(x)\,\mathrm{Log}|x|\,dx\right.$$

$$= -\int_{\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{1}{n},+\frac{1}{n}\right]} \frac{x}{|x|}\,\mathrm{Log}|x|\,\varphi''(x)\,dx$$

En regroupant tous les termes:

$$\langle T_n, \varphi\rangle = \int_{1/n}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left(\varphi(x)-\varphi(-x)\right)dx - 2\,\mathrm{Log}\,n\,\varphi'(0)$$

$$= n\left[\varphi\left(\tfrac{1}{n}\right)-\varphi\left(-\tfrac{1}{n}\right)\right] + \mathrm{Log}\,n\left[\varphi'\left(\tfrac{1}{n}\right)+\varphi'\left(-\tfrac{1}{n}\right)\right] -$$

$$-\int_{\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{1}{n},+\frac{1}{n}\right]} \frac{x}{|x|}\,\mathrm{Log}|x|\,\varphi''(x)\,dx \; - 2\,\mathrm{Log}\,n\,\varphi'(0)$$

$$= -\int_{\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{1}{n},+\frac{1}{n}\right]} \frac{x}{|x|}\,\mathrm{Log}|x|\,\varphi''(x)\,dx + n\left[\varphi\left(\tfrac{1}{n}\right)-\varphi\left(-\tfrac{1}{n}\right)\right]$$

$$+\mathrm{Log}\,n\left[\varphi'\left(\tfrac{1}{n}\right)+\varphi'\left(-\tfrac{1}{n}\right)-2\varphi'(0)\right]$$

Notons que $\frac{x}{|x|}\mathrm{Log}|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, donc

$$\lim_{n\to\infty} -\int_{\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{1}{n},+\frac{1}{n}\right]} \frac{x}{|x|}\,\mathrm{Log}|x|\,\varphi''(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{|x|}\,\mathrm{Log}|x|\,\varphi''(x)\,dx$$

En outre: $\lim_{n\to\infty} n\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)-\varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right]$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon}\right] = 2\varphi'(0).$$

Et puis: En utilisant le Th— des accroissements finis:

$$\left|2\varphi'(0)-\varphi'\left(\frac{1}{n}\right)-\varphi'\left(-\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{2}{n}\sup_{c\in\left]-\frac{1}{n},+\frac{1}{n}\right[}|\varphi''(c)|$$

Ce qui implique:

$$\lim_{n\to\infty} \text{Log}n\left[2\varphi'(0)-\varphi'\left(\frac{1}{n}\right)-\varphi'\left(-\frac{1}{n}\right)\right] = 0.$$

Nous avons finalement:

$$\lim_{n\to\infty}\langle T_n,\varphi\rangle = -\left\langle\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x}{|x|}\text{Log}x\right),\varphi\right\rangle - 2\langle\delta_0',\varphi\rangle$$

—— o ——

EXERCICE IV :

$$f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{1+x^2}$$

$$g(x) := e^{-x^2/2} \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\hat{h}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\nu x}}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+i\nu x}}{x^2+1}\,dx$$

Intégrale de 3ème type

$$= 2\pi i \, \text{Rés}\left(\frac{e^{i\nu z}}{z^2+1} ; i\right)$$

$$= 2\pi i \, \frac{e^{-|\nu|}}{2i} = \boxed{\pi e^{-|\nu|} = \hat{h}(\nu)}$$

Or, $\mathcal{F}\{e^{-\pi t^2}\} = e^{-\pi \nu^2}$

$t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi\nu t}\,dt = e^{-\pi\nu^2}$

$dt = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ $\Big\lfloor_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i2\pi\nu \frac{x}{\sqrt{2\pi}}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{-\pi\nu^2}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\sqrt{2\pi}\nu x} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{-\pi\nu^2}$$

$\sqrt{2\pi}\,\nu = \nu'$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\nu' x}\,dx = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\nu'^2}{2}}$$

$$\therefore\ g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \boxed{\hat{g}(\nu) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\nu^2}{2}}}$$

$$\mathcal{F}(gh)(\nu) = (\hat{g} * \hat{h})(\nu)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\nu-\eta)\,\hat{h}(\eta)\,d\eta$$

$$\pi\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\nu-\eta)^2}{2}} e^{-|\eta|}\,d\eta\,,$$

$$= \pi\sqrt{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(\nu-\eta)^2}{2}} e^{+\eta}\,d\eta + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(\nu-\eta)^2}{2}} e^{-\eta}\,d\eta\right]$$

(Chgt de var : $\eta \to -\eta$)

$$= \pi\sqrt{2\pi}\left[-\int_{+\infty}^{0} e^{-\frac{(\nu+\eta)^2}{2}} e^{-\eta}\,d\eta + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(\nu-\eta)^2}{2}} e^{-\eta}\,d\eta\right]$$

$$= \pi\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\nu^2}{2}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \left(e^{+\nu\eta} + e^{-\nu\eta}\right) e^{-\eta}\,d\eta$$

$$= (2\pi)^{3/2}\, e^{-\frac{\nu^2}{2}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2}-\eta} \operatorname{ch}\nu\eta\,d\eta$$

———— o ————

GROUPE DES ÉCOLES DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

CONTRÔLE DE CONNAISSANCES

MODULE : Mathématiques Appliquées — CODE : MA11
DURÉE : 3 heures — DATE : 21 Février 2007
DOCUMENTS AUTORISÉS : Polys de Bayen-Margaria — COORDINATEUR : Arif Mardin

---

EXERCICE 1:

Soit $a \in \mathbb{R}$ une constante non nulle. En utilisant le théorème des résidus, calculer l'intégrale suivante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx.$$

EXERCICE 2:

1. Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe, et $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire borné. Soit A^* l'opérateur adjoint de A. Montrer que les opérateurs A^*A, $A + A^*$, $i(A - A^*)$ sont auto-adjoints.

2. Soit $\mathcal{H} = l^2$, l'espace de Hilbert complexe des suites infinies dénombrables de nombres complexes de carré sommable. On y définit un opérateur linéaire A par:

$$A(x_1, x_2, \cdots) := (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \cdots)$$

où $\xi := (x_1, x_2, \cdots)$ est un élément quelconque de l^2. Montrer que A est auto-adjoint. Trouver ses valeurs propres et les vecteurs propres correspondants.

EXERCICE 3:

Le produit de convolution de deux fonctions localement intégrables f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et 2π-périodiques est défini par:

$$(f \star g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-u)g(u)du$$

1. Montrer que $f \star g$ est 2π-périodique, et qu'elle est localement intégrable.
2. Déterminer le $n^{ième}$ coefficient de Fourier du développement en série de Fourier de $f \star g$ en fonction des coefficients du développement en série de Fourier de f et g.

EXERCICE 4:

On considère la fonction de la variable réelle t définie par

$$f(t) := Y(t) \log |t|$$

où Y est la fonction échelon unité de Heaviside. On admettra que f est localement sommable.

1. Soit T la distribution dérivée de la distribution régulière associée à f. Montrer que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$, on a:

$$< T, \phi >= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left\{ \phi(\epsilon) \log \epsilon + \int_\epsilon^\infty \frac{\phi(t)}{t} dt \right\}.$$

2. Montrer que l'on a, dans $\mathcal{D}'$:

$$T = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left\{ \log \epsilon . \delta(t) + \frac{Y(t-\epsilon)}{t} \right\}.$$

GROUPE DES ÉCOLES DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

CONTRÔLE DE CONNAISSANCES

MODULE : Mathématiques Appliquées — CODE : MAT3001
DURÉE : 1,5 heures — DATE : 23 Novembre 2007
DOCUMENTS AUTORISÉS : Poly Bayen-Margaria — COORDINATEUR : Arif Mardin

---

EXERCICE 1:

On rappelle qu'une condition suffisante de permutation intégrale/série est que, si $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions réelles définies sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ telle que $\sum_{i=0}^{+\infty} \int |f_i| d\mu$ soit finie, alors:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} f_i \text{ est intégrable et } \int_E \left(\sum_{i=0}^{+\infty} f_i\right) d\mu = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\int_E f_i d\mu\right).$$

Soit à calculer l'intégrale suivante:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx \quad \left[\text{On a } \frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n\geq 1} e^{-nx}\right].$$

Exprimer I sous forme de

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin x e^{-kx} dx,$$

et en déduire que $I = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{1+k^2}$.

EXERCICE 2:

On considère la double intégrale définie par:

$$I = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^1 e^{-x} \sin(2xy) dy\right] dx.$$

Vérifier qu le théorème de Fubini y est applicable, et calculer sa valeur.

EXERCICE 3:

1. Vérifier que les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent en coordonnées polaires:
$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}.$$
2. Soit $f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + iQ(x,y)$. Déterminer $Q(x,y)$ pour que $f(z)$ soit une fonction holomorphe.

EXERCICE 4:

Calculer l'intégrale suivante
$$\frac{1}{2i\pi}\oint_\Gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz$$
où Γ est une courbe de Jordan (i.e. un circuit fermé) dans les cas suivants:

- 0 est à l'intérieur de Γ et 1 est à l'extérieur;
- 1 est à l'intérieur de Γ et 0 est à l'extérieur;
- 0 et 1 sont à l'intérieur de Γ;
- 0 et 1 sont à l'extérieur de Γ.

EXERCICE I : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^\infty |\sin x\, e^{-kx}|\, dx \leq \int_0^\infty x\, e^{-kx}\, dx = \frac{1}{k^2},$$

qui est le terme général d'une série convergente. On peut donc appliquer le théorème de permutation série/intégrale et il vient :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \int_0^\infty \sum_{n \geq 1} \sin x\, e^{-nx}\, dx$$

$$= \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty \sin x\, e^{-nx}\, dx$$

$$= \sum_{n \geq 1} I_n, \text{ où}$$

$I_n = \int_0^\infty \sin x\, e^{-nx}\, dx$. Après une double ipp, on trouve :

$$I_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} I_n, \text{ i.e. } I_n = \frac{1}{1+n^2}.$$

On a finalement

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+n^2}}$$

EXERCICE II :

$$I = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^1 \underbrace{e^{-x} \sin(2xy)}_{f(x,y)} dy \right] dx .$$

Nous avons

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^1 |f(x,y)| dy \leq \int_0^{\infty} e^{-x} dx \int_0^1 dy = 1$$

$\Rightarrow$ le théorème de Fubini est donc applicable :

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^1 f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{\infty} f(x,y) dx$$

Or, $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin 2xy \, dx = [uv]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v \, du$,

où $u = e^{-x}$, $du = -e^{-x} dx$

$dv = \sin 2xy \, dx$ $\quad v = -\frac{1}{2y} \cos 2xy$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin 2xy \, dx = \left[-\frac{e^{-x}}{2y} \cos 2xy \right]_0^{\infty} - \frac{1}{2y} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos 2xy \, dx$$

$$= +\frac{1}{2y} - \frac{1}{2y} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos 2xy \, dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos 2xy \, dx = [uv]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v \, du$$

où $u = e^{-x}$ $\quad du = -e^{-x}$

$dv = \cos 2xy\,dx$ $\quad v = \frac{1}{2y}\sin 2xy$

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos 2xy\,dx = \left[\frac{e^{-x}}{2y}\sin 2xy\right]_0^\infty + \frac{1}{2y}\int_0^\infty e^{-x}\sin 2xy\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2y}\int_0^\infty e^{-x}\sin 2xy\,dx$$

Donc :

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin 2xy\,dx = \frac{1}{2y} - \frac{1}{4y^2}\int_0^\infty e^{-x}\sin 2xy\,dx$$

$$\frac{1+4y^2}{4y^2}\int_0^\infty e^{-x}\sin 2xy\,dx = \frac{1}{2y}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x}\sin 2xy\,dx = \frac{2y}{1+4y^2}$$

Donc :

$$I = \int_0^1 \frac{2y}{1+4y^2}\,dy \qquad 4y^2 = u \qquad 2y\,dy = \frac{du}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 \frac{du}{1+u} = \frac{1}{4}\left[\ln(1+u)\right]_0^4 = \boxed{\frac{1}{4}\ln 5}$$

EXERCICE III :

$x = r\cos\theta \; ; \; y = r\sin\theta$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial P}{\partial y}(r\cos\theta)$$

$$= r\left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial P}{\partial x}\sin\theta\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{\partial Q}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial Q}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial Q}{\partial y}\sin\theta$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial y}\cos\theta + \frac{\partial P}{\partial x}\sin\theta$$

$$= -\left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial P}{\partial x}\sin\theta\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\sin\theta$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = \frac{\partial Q}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial Q}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= -r\sin\theta\frac{\partial Q}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$= +r\sin\theta\frac{\partial P}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$= r\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial P}{\partial x}\right)$$

$$= r\frac{\partial P}{\partial r} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial Q}}$$

$$f(z) = \underbrace{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}_{P(x,y)} + iQ(x,y)$$

$Q = Q(x,y)$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2.$$

$$\Rightarrow Q(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + f(x)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$-12x^2y + 4y^3 = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$= -12x^2y + 4y^3 + f'(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = c.$$

$$\boxed{Q(x,y) = 4(x^2 - y^2)xy + c^{te}}$$

EXERCICE IV :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$

a) $0 \in \text{int}(\Gamma)$, $1 \notin \text{int}(\Gamma)$:

. thm des résidus :

$$\oint \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = 2\pi i \, \text{Res}\left(\frac{e^z}{z(1-z)^3}; 0\right)$$

$$= +2\pi i \; . \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = +1}$$

. formule intégrale de Cauchy :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$f(z) = \frac{e^z}{(1-z)^3} \; ; \; z_0 = 0$$

$$+1 = f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$

b) $0 \notin \text{int}(\Gamma)$, $1 \in \text{int}(\Gamma)$:

. thm des résidus :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = \text{Res}\left(\frac{e^z}{z(1-z)^3}; 1\right)$$

$$= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left((z-1)^3 \cdot \frac{e^z}{z(1-z)^3} \right)_{z=1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(-\frac{e^z}{z}\right)\Big|_{z=1} = \frac{-1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z \cdot z - e^z}{z^2}\right)\Big|_{z=1}$$

$$= \frac{-1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z(z-1)}{z^2}\right)\Big|_{z=1}$$

$$= \frac{-1}{2}\left[\frac{[e^z(z-1)+e^z]z^2 - 2z(z-1)e^z}{z^4}\right]_{z=1}$$

$$= -\frac{e}{2}$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = -\frac{e}{2}}$$

- <u>formule intégrale de Cauchy :</u>

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,$$

$$f(z) = \frac{e^z}{z} \; ; \; z_0 = 1 \; , \; n = 2.$$

$$f^{(2)}(1) = \frac{2!}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z(z-1)^3}dz$$

$$f^{(2)}(z)\Big|_{z=1} = e$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = -\frac{e}{2}$$

c) 0 et $1 \in \text{int}(\Gamma)$ · théorème des résidus

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = \text{Res}\left(\frac{e^z}{z(1-z)^3}; 0\right) + \text{Res}\left(\frac{e^z}{z(1-z)^3}; 1\right)$$

$$= +1 - \frac{e}{2}$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z(z-1)^3}dz = 1 - \frac{e}{2}}$$

d) 0 et $1 \notin \text{int}(\Gamma)$: théorème de Cauchy :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z(z-1)^3}dz = 0.}$$

GROUPE DES ÉCOLES DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

CONTRÔLE DE CONNAISSANCES

MODULE : Mathématiques Appliquées — CODE : MAT3001
DURÉE : 3heures — DATE : 18 Janvier 2008
DOCUMENTS AUTORISÉS : Polys de Bayen-Margaria — COORDINATEUR : Arif Mardin

---

EXERCICE I:

1. Calculer les pôles de la fonction $\cosh z$.

2. Calculer l'intégrale définie sur le plan complexe $\mathbb{C}$ par:

$$\oint_C \frac{e^{az}}{\cosh z} dz \qquad (1)$$

où C est le contour fermé par le rectangle dont les sommets se trouvent aux points $(-R, 0), (+R, 0), (+R, i\pi)$, et$(-R, i\pi)$ dans $\mathbb{C}$, et $a \in \mathbb{R}$ est tel que $|a| < 1$.

3. Utiliser le calcul de l'intégrale (1) pour prouver que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}.$$

EXERCICE II:

Soit $\mathcal{H}$ l'espace préhilbertien séparable des polynômes en $x \in \mathbb{C}$ à valeurs complexes, muni du produit scalaire:

$$< f, g >= \int_0^{+\infty} \overline{f(x)} g(x) e^{-x} dx.$$

1. Montrer que l'opérateur linéaire défini par:

$$\mathcal{L} := x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx},$$

est auto-adjoint dans $\mathcal{H}$.

2. On rappelle que les vecteurs propres de $\mathcal{L}$ sont des polynômes donnés par la formule:

$$l_n(x) = e^x \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Calculer $l_n(x)$ et la valeur propre λ_n correspondante.

3. Montrer que pour tout polynôme $Q(x)$ on a:

$$< l_n, Q >= (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} Q^{(n)}(x)\, dx.$$

En déduire $< l_n, l_m >$ et en particulier $\|l_n\|$.

EXERCICE III:

1. Montrer que la solution de léquation $xT = 1$ au sens des distributions est donnée par:

$$T = c\delta + vp\frac{1}{x} \qquad c = \text{Cst}$$

2. Montrer que, Y étant la fonction de Heaviside, $Y' = \delta$ au sens des distributions. Utiliser ce résultat pour calculer la transformation de Fourier de Y.(On pourra utiliser le résultat de la question précédente)

3. Calculer la transformation de Fourier de la fonction $e^{-2\pi|x|}$ et en déduire celle de $\frac{1}{1+x^2}$.

4. Le but de cette question est de calculer la transformation de Fourier de $\arctan x$. On considère la fonction

$$f(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2} - \pi Y(x)$$

qui est impaire et tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$.Montrer que la transformation de Fourier de f peut être écrite comme:

$$\hat{f}(\nu) = -2i \int_0^{+\infty} (\arctan x - \frac{\pi}{2}) \sin 2\pi\nu x dx.$$

Calculer cette intégrale et en déduire que:

$$\mathcal{F}(\arctan x) = \frac{1}{2i} vp \frac{1}{\nu} + i \frac{1 - e^{-2\pi|\nu|}}{2\nu}.$$

5. Vérifier le résultat obtenu par dérivation.

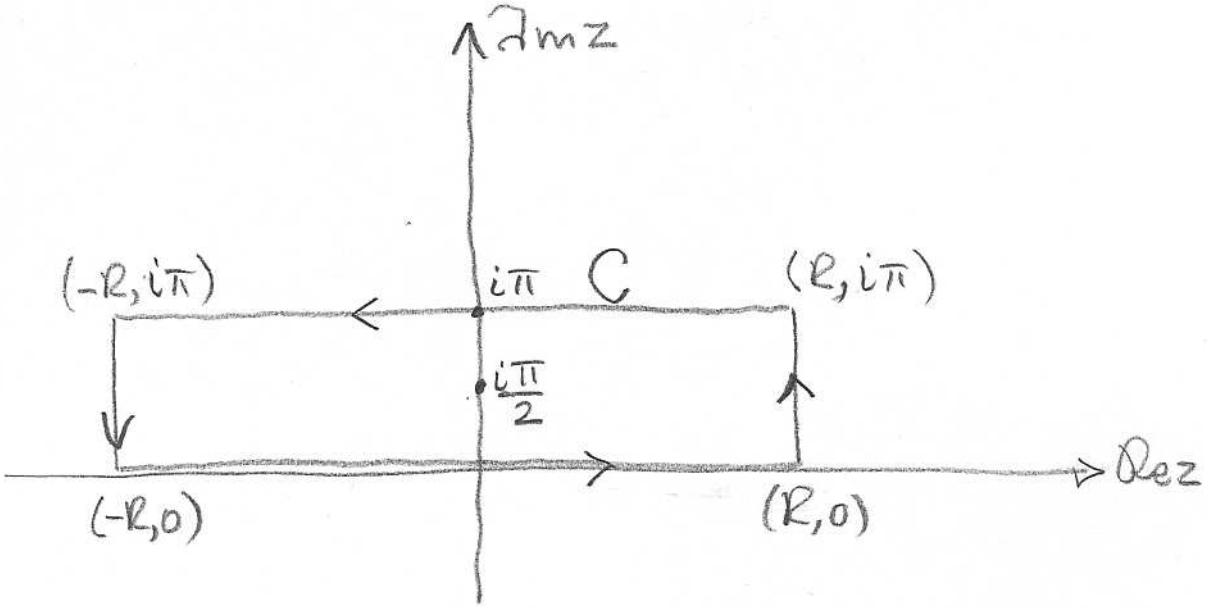
EXERCICE I:

1) $Ch z = 0 \Leftrightarrow e^z + e^{-z} = 0$

$\Leftrightarrow e^{2z} = -1$

$\Leftrightarrow z = (2n+1)\frac{\pi}{2} i \quad n \in \mathbb{Z}.$

2)



Visiblement le seul pôle contenu dans C est $z = i\frac{\pi}{2}$, où le résidu se calcule par la formule

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}; i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f(i\frac{\pi}{2})}{g'(i\frac{\pi}{2})} = \frac{e^{ai\frac{\pi}{2}}}{Sh\, i\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{e^{ai\frac{\pi}{2}}}{i \sin\frac{\pi}{2}} = -i\, e^{ai\frac{\pi}{2}} \qquad (|a|<1)$$

(Cette formule se trouve dans Bayen-Margaria, Tome I, page 55).

Le théorème des résidus nous permet alors d'écrire :

$$\oint_C \frac{e^{az}}{Chz}\,dz = 2\pi i\, Res\left\{\frac{e^{az}}{Chz}\,;\, i\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= 2\pi i\left[-i\,e^{ai\frac{\pi}{2}}\right] = \underline{\underline{2\pi e^{ai\frac{\pi}{2}}}}$$

3) $$\oint_C \frac{e^{az}}{Chz}\,dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}}{Chx}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{Ch(R+iy)}\,i\,dy$$

$$+ \int_{+R}^{-R} \frac{e^{a(x+i\pi)}}{Ch(x+i\pi)}\,dx + \int_{\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+iy)}}{Ch(-R+iy)}\,i\,dy$$

Or, $$\int_{+R}^{-R} \frac{e^{a(x+i\pi)}}{Ch(x+i\pi)}\,dx = -\int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}e^{i\pi a}}{Chx\,Chi\pi + Shx\,Shi\pi}\,dx$$

$$Chi\pi = \frac{e^{i\pi}+e^{-i\pi}}{2} = Cos\pi = -1$$

$$Shi\pi = \frac{e^{i\pi}-e^{-i\pi}}{2} = i\,Sin\pi = 0$$

Donc : $$\int_{+R}^{-R} \frac{e^{a(x+i\pi)}}{Ch(x+i\pi)}\,dx = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}e^{i\pi a}}{Chx}\,dx$$

Pour calculer les deux intégrales par rapport à y, notons que

$$|Ch(R+iy)| = \left| \frac{e^{R+iy} + e^{-(R+iy)}}{2} \right|$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left\{ |e^{R+iy}| - |e^{-(R+iy)}| \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ e^{R} - e^{-R} \right\} \geqslant \frac{1}{4} e^{R} ;$$

donc

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{Ch(R+iy)} i\,dy \right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{e^{aR}}{\frac{1}{4}e^{R}} dy = 4\pi e^{(a-1)R}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\uparrow\infty} \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{Ch(R+iy)} i\,dy \right| \leqslant \lim_{R\uparrow\infty} 4\pi e^{(a-1)R} = 0.$$

De la même façon, en notant que

$$|Ch(-R+iy)| \geqslant -\frac{1}{4} e^{R},$$

on pourra déduire que

$$\lim_{R\uparrow\infty} \left| \int_{\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+iy)}}{Ch(-R+iy)} i\,dy \right| \leqslant \lim_{R\uparrow\infty} 4\pi e^{-(a+1)R} = 0.$$

Par conséquent

$$\oint_C \frac{e^{az}}{\mathrm{Ch}z}\,dz = 2\pi e^{ai\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{R\uparrow\infty}\left\{\int_{-R}^{+R}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx + e^{ai\pi}\int_{-R}^{+R}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx\right\}$$

$$\Rightarrow (1+e^{ai\pi})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx = 2\pi e^{ai\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx = \frac{2\pi}{e^{ia\frac{\pi}{2}}+e^{-ia\frac{\pi}{2}}} = \frac{\pi}{\mathrm{Cos}\frac{\pi a}{2}}$$

Or,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx + \int_{0}^{\infty}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx + \int_{0}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}x}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{Ch}ax}{\mathrm{Ch}x}\,dx$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{Ch}ax}{\mathrm{Ch}x}\,dx = \frac{\pi}{2\,\mathrm{Cos}\frac{\pi a}{2}}}$$

EXERCICE II :

i) $\forall f, g \in \mathcal{H}$: $\langle f, g \rangle := \int_0^{\infty} \overline{f(x)}\, g(x)\, e^{-x}\, dx$

$$L := x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx}$$

En calculant $\langle Lf, g \rangle$ et $\langle f, Lg \rangle$ en faisant deux intégrations par parties pour chacun, on trouve, $\forall f, g \in \mathcal{H}$:

$$\langle Lf, g \rangle - \langle f, Lg \rangle$$

$$= -\int_0^{+\infty} \overline{f'(x)}\, g(x) \left[(xe^{-x})' - (1-x)e^{-x} \right] dx$$

$$- \int_0^{+\infty} \overline{f(x)}\, g'(x) \left[(1-x)e^{-x} - (xe^{-x})' \right] dx$$

$$= -\int_0^{+\infty} \left[\overline{f'(x)}\, g(x) - \overline{f(x)}\, g'(x) \right] \left[(xe^{-x})' - (1-x)e^{-x} \right] dx$$

$= 0$ Donc L est auto-adjoint.

ii) Les vecteurs propres de L sont des polynômes donnés par la formule:

$$\ell_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}[x^n e^{-x}] \quad n \in \mathbb{N}$$

$$= e^x \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^n)^{(k)} (e^{-x})^{(n-k)} \right]$$

$$= \cancel{e^x} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{n-k} \cancel{e^{-x}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2}{k![(n-k)!]^2} (-1)^{n-k} x^{n-k}$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} n^2 x^{n-1} + \dots + n!$$

Or $L\ell_n(x) = \left(x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx}\right)\ell_n(x) = \lambda_n \ell_n(x)$

Le terme de plus haut degré du premier membre est obtenu par:

$$-x\frac{d}{dx}\ell_n(x) = -x\frac{d}{dx}[(-1)^n x^n] = (-1)^{n+1} n x^n,$$

et celui du second membre : $\lambda_n (-1)^n x^n$.

Nous avons donc: $\boxed{\lambda_n = -n}$.

iii) Soit $Q(x)$ un polynôme quelconque.

Alors: $\langle l_n, Q\rangle = \int_0^\infty e^x [x^n e^{-x}]^{(n)} Q(x) e^{-x} dx$

$\overset{\text{ipp}}{=} \underbrace{[(x^n e^{-x})^{(n-1)} Q(x)]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty (x^n e^{-x})^{(n-1)} Q'(x) dx$

$= \dots = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-x} Q^{(n)}(x) dx$

(après n ipp)

Si $\deg(Q) < n$, on a $\langle l_n, Q\rangle = 0$.

En particulier,

$\langle l_n, l_m\rangle = 0$ lorsque $n \neq m$.

<u>$m = n$:</u> $\|l_n\|^2 = \langle l_n, (-1)^n x^n\rangle$

$= (-1)^n \langle l_n, x^n\rangle$

$= (-1)^n \int_0^\infty e^x (x e^{-x})^{(n)} x^n e^{-x} dx$

$= \underbrace{\dots}_{\text{ipp: n-fois}} = (-1)^n (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-x} (x^n)^{(n)} dx$

$= \int_0^\infty x^n e^{-x} n! dx = n! \underbrace{\int_0^\infty x^n e^{-x} dx}_{\Gamma(n+1) = n!}$

$\Rightarrow \boxed{\|l_n\| = n!}$

EXERCICE III :

1) La solution de l'équation $xT = 1$ peut s'écrire comme la somme de :

i) La solution de l'équation sans second membre

$$xT = 0$$

ii) Une solution particulière de l'équation avec second membre $xT = 1$.

Or, nous avons vu en TD que :

$$xT = 0 \iff T = c\delta,$$

c étant une constante et δ étant la distrib^{n} de Dirac. Nous avons vu aussi en TD qu'une solution particulière de l'équation $xT = 1$ est donnée par : $T = vp\frac{1}{x}$.

Par conséquent, la solution générale de l'equation sans second membre $xT = 1$ peut s'écrire comme

$$\boxed{T = c\delta + vp\frac{1}{x}} \qquad c = C^{te}.$$

2) $\forall \varphi \in \mathcal{D}$: $\langle Y', \varphi \rangle = -\langle Y, \varphi' \rangle$

$$= -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0)$$

$$= \langle \delta, \varphi \rangle$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Y' = \delta \text{ dans } \mathcal{D}'}$$

$$2i\pi\nu\,\mathcal{F}\{Y\}(\nu) = 1$$

$$\Rightarrow 2i\pi\nu\,\mathcal{F}\{Y\}(\nu) = vp\frac{1}{\nu} + C\delta$$

$$\therefore \mathcal{F}\{Y\}(\nu) = \frac{1}{2\pi i}\left\{vp\frac{1}{\nu} + C\delta\right\}$$

$Y(x) - \frac{1}{2}$ est impaire; il en est de même de sa TF : $\therefore$ la distrib^n

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{vp\frac{1}{\nu} + C\delta\right\} - \frac{1}{2}\delta$$

est impaire $\Rightarrow$ $\frac{1}{2\pi i}vp\frac{1}{\nu} + \underbrace{\frac{C\delta}{2\pi i} - \frac{\delta}{2}}_{=0}$

$\Rightarrow C = i\pi$

$$\therefore \boxed{\mathcal{F}\{Y\}(\nu) = \frac{1}{2\pi i}vp\frac{1}{\nu} + \frac{1}{2}\delta(\nu)}$$

3) $$\mathcal{F}\{e^{-2\pi|x|}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi\nu x} \cdot e^{-2\pi|x|}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi x(1-i\nu)}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi x(1+i\nu)}\, dx$$

$$= \left[\frac{e^{i2\pi x(1-i\nu)}}{2\pi(1-i\nu)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-2\pi x(1+i\nu)}}{-2\pi(1+i\nu)}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-i\nu)} + \frac{1}{2\pi(1+i\nu)} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{1+\nu^2}\right]$$

$$\therefore \mathcal{F}\{e^{-2\pi|x|}\} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+\nu^2}\right)$$

$$\mathcal{F}^2\{e^{-i2\pi|x|}\} = \frac{1}{\pi}\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\nu^2}\right) = e^{-2\pi|x|}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \pi e^{-2\pi|\nu|}$$

4) $f(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2} - \pi Y(x)$.

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i2\pi\nu x}\, dx$$

$x \to -x$:

$$\hat{f}(\nu) = -\int_{+\infty}^{-\infty} \underbrace{f(-x)}_{-f(x)\ (f \text{ impaire!})}\, e^{+i2\pi\nu x}\, dx$$

$$\therefore \hat{f}(\nu) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i2\pi\nu x}\, dx$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\nu) = -\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(e^{i2\pi\nu x} - e^{-i2\pi\nu x}\right) dx\right.$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin 2\pi\nu x\, dx$$

$$= -2i \int_{0}^{\infty} f(x) \sin 2\pi\nu x\, dx$$

Sur l'intervalle $[0, +\infty[$

$$f(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2} - \pi = \arctan x - \frac{\pi}{2}$$

$$\hat{f}(\nu) = -2i \int_0^{\infty} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) \sin 2\pi\nu x \, dx$$

$$\arctan x - \frac{\pi}{2} = u \qquad \sin 2\pi\nu x \, dx = dv$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = du \qquad -\frac{1}{2\pi\nu} \cos 2\pi\nu x = v$$

$$\hat{f}(\nu) = -2i \left\{ \left[\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) \frac{\cos 2\pi\nu x}{2\pi\nu} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi\nu x}{1+x^2} dx \right\}$$

$$= -2i \left\{ -\frac{1}{4\nu} + \frac{1}{2\pi\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi\nu x}}{1+x^2} dx \right\}$$

$$= +\frac{i}{2\nu} - \frac{i}{2\pi\nu} \underbrace{\mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}}_{\pi e^{-2\pi|\nu|}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{f}(\nu) = \frac{i}{2\nu}\left(1 - e^{-2\pi|\nu|}\right)}.$$

En admettant que ce résultat est encore vrai dans $\mathcal{S}'$, on aura :

$$\hat{f}(\nu) = \mathcal{F}\{\arctan x\} + \mathcal{F}\{\tfrac{\pi}{2}\} - \pi\mathcal{F}\{\gamma\}$$

$$= \mathcal{F}\{\arctan x\} + \frac{\pi}{2}\delta(\nu) - \pi\left\{\frac{1}{2\pi i}\mathrm{vp}\frac{1}{\nu} + \frac{1}{2}\delta(\nu)\right\}$$

$$= \mathcal{F}\{\arctan x\} - \frac{1}{2i}\mathrm{vp}\frac{1}{\nu}$$

On a finalement

$$\mathcal{F}\{\arctan x\} = \hat{f}(\nu) + \frac{1}{2i}\mathrm{vp}\frac{1}{\nu}$$

i.e.

$$\boxed{\mathcal{F}\{\arctan x\} = \frac{i}{2\nu}\left(1 - e^{-2\pi|\nu|}\right) + \frac{1}{2i}\mathrm{vp}\frac{1}{\nu}}$$

5) On a $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = 2i\pi\nu\,\mathcal{F}\{\arctan x\}$$

Il faut donc vérifier que :

$$\pi e^{-2\pi|\nu|} = 2i\pi\nu\left[\frac{i}{2\nu}\left(1 - e^{-2\pi|\nu|}\right) + \frac{1}{2i}\mathrm{vp}\frac{1}{\nu}\right]$$

$$= -\pi\left(1 - e^{-2\pi|\nu|}\right) + \pi\overbrace{\nu\,\mathrm{vp}\frac{1}{\nu}}^{1}$$

$$= -\pi + \pi e^{-2\pi|\nu|} + \pi = \pi e^{-2\pi|\nu|}$$

▨

Institut National des Télécommunications - Télécom INT
EI1, Module AN 12
Coordonateur : Annabelle Joannic-Chardin

Analyse Numérique

Examen 1, 2005/06
24 avril 2006
Durée : 1 heure 30
Documents autorisés

N. B. Les exercices sont indépendants

Exercice 1

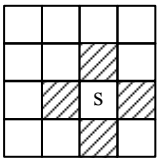
On considère trois types de populations α, β, et γ de poissons. L'angle de vision des poissons tirés au hasard dans ces populations suivent les lois de probabilité données respectivement par les densités sur $[0,\pi]$ suivantes : $f_\alpha(x)=\frac{1}{\pi}$, $f_\beta(x)=\frac{2x}{\pi^2}$ et $f_\gamma(x)=c\left(\sin(x)+\frac{1}{\pi}\right)$ (avec $c>0$ constante normalisatrice).

1. Proposer des méthodes de simulation de l'angle de vision pour chacune des populations ;
2. On considère un mélange des trois populations ci-dessus, avec des proportions Π_α, Π_β et Π_γ. Quelle est la loi de probabilité f de l'angle de vision d'un poisson tiré au hasard dans ce mélange ? Proposer une méthode de simulation de f.

Exercice 2

Remarque : les 2 parties peuvent être traitées indépendamment.

1. On cherche à simuler une image en noir et blanc de taille $m\times m$. On modélise l'image par $X=(X_s)_{s\in S}$ où S est l'ensemble des pixels, *i.e.* le carré de $m\times m$ éléments, et chaque X_s la variable aléatoire à valeurs dans $\Omega=\{0,1\}$ correspondant au pixel numéro s.
   a) En remarquant que X est un vecteur aléatoire discret, suggérer une méthode de simulation directe de X (commencer par expliciter l'espace d'états de X ainsi que sa loi de probabilité). Pourquoi une telle méthode n'est pas efficace ?
   b) Un cas particulier est de considérer que tous les pixels sont indépendants. Que devient la loi de X et comment sa procédure de simulation est-elle simplifiée ?
   c) On suppose maintenant que la loi de X est donnée par $P(X=x)=c\exp\left(-\sum_{s,t\ voisins}\varphi_{st}(x_s,x_t)\right)$, avec $c>0$ constante normalisatrice. Les pixels voisins sont définis ci-contre : les pixels hachurés sont les voisins du pixel numéro s. Montrer que la loi de X_s conditionnelle à toutes les autres variables restantes est égale à sa loi conditionnelle aux variables de tous voisins de s : $P(X_s=x_s|X_t=x_t\ \forall\, t\neq s)=P(X_s=x_s|X_t=x_t\ \forall\, t\ voisins\ de\ s)$.



En déduire une application de l'échantillonneur de Gibbs.

2. On se place à présent dans le cadre de la classification statistique d'images. X devient inobservable, mais on observe un autre vecteur aléatoire $Y=(Y_s)_{s\in S}$ à valeurs dans R^n et dont la loi conditionnelle à X est donnée par $f_{Y|X=x}(y)=\prod_{s\in S} f_{Y_s|X_s=x_s}(y_s)$.

   a) On suppose que les densités $f_{Y_s|X_s=0}(y_s)$ et $f_{Y_s|X_s=1}(y_s)$ ne dépendent pas de s et sont gaussiennes. Décrire brièvement une méthode de simulation de Y.

   b) On dispose d'une image de la marée noire suite au naufrage de l'Erika sur les côtes bretonnes, composée d'eau et de pétrole. On souhaite connaître l'étendue de la nappe de pétrole et pour cela il faut classer les pixels dans la classe « eau » $(x_s=0)$ ou dans la classe « pétrole » $(x_s=1)$. On cherche à tester plusieurs méthodes de classification. Expliquer en quelques phrases, sans calcul, comment utiliser la possibilité de simuler X et Y pour choisir la meilleure méthode.

Exercice 3

Soient Ω le rectangle dans R^2 de la Figure 1, Γ sa frontière, et f une fonction définie sur Ω de carré intégrable. On recherche la solution u de l'équation différentielle aux dérivées partielles : $-(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2})=f(x,y)$ dans Ω et $u(x,y)=0$ sur Γ.

On se propose d'approcher la solution par la méthode des éléments finis. On s'intéresse à la triangulation représentée sur la Figure 1, c'est-à-dire un découpage de Ω en 6 carrés élémentaires.

On considère le carré $K=[0,1]^2$ représenté sur la Figure 2, et $\Sigma=\{a_i\}_{i=0\cdots 8}$ composé des sommets, des milieux des côtés et du milieu du carré K. Par ailleurs, on considère Q l'ensemble des polynômes sur R^2 de degré inférieur ou égal à deux par rapport à chacune des variables : $p(x,y)=\sum_{0\leqslant i,j\leqslant 2}\alpha_{ij}x^i y^j$.

1. Montrer que (K,Σ,Q) est un élément fini de Lagrange. Exhiber les fonctions de base associées à $a_0=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $a_1=(0,0)$ et $a_3=(1,1)$.
2. Donner la dimension du système linéaire à résoudre en utilisant la triangulation et l'élément fini proposés.
3. Numéroter les carrés affines-équivalents de la triangulation et caractériser les fonctions φ associées aux points $(1,1)$ et $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$: préciser leurs supports et expliciter leurs formes polynomiales.
4. Numéroter les fonctions de bases et préciser parmi les éléments de la matrice A correspondante ceux qui sont nuls et ceux qui sont non nuls.

Figure 1

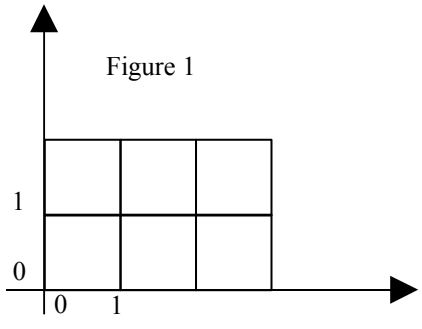
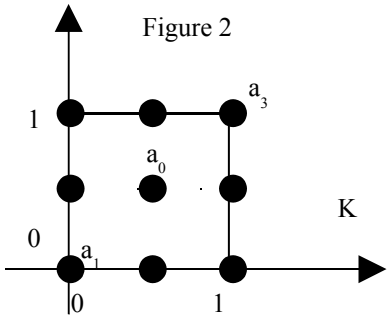


Figure 2



Corrigé succinct du sujet d'AN12

Exercice 1

1. f_α (loi uniforme sur $[0,\pi]$) : simulée par méthode de fonction de répartition inverse ($F_\alpha^{-1}(u)=\Pi u$)
f_β : 2 possibilités, soit méthode de fonction de répartition inverse ($F_\beta^{-1}(u)=\Pi\sqrt{u}$), soit méthode acceptation-rejet ($g=f_\alpha$ et M=2)

f_γ (c=1/3) : méthode acceptation-rejet ($g=f_\alpha$ et $M=\frac{\Pi+1}{3}$)

2. $f(x)=\Pi_\alpha f_\alpha(x)+\Pi_\beta f_\beta(x)+\Pi_\gamma f_\gamma(x)$

Soit Y v.a. à valeurs dans $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ désignant le type, et X v.a. à valeurs dans $[0,\pi]$ désignant l'angle de vision.

Méthode des lois marginales pour simuler f : on tire y dans $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ selon $\Pi=(\Pi_\alpha,\Pi_\beta,\Pi_\gamma)$ (méthode de fonction de répartition inverse pour variable discrète) , ensuite x dans $[0,\pi]$ selon f_y

Exercice 2

1.a. $\Omega(X)$: ensemble de toutes les configurations possibles de pixels noirs et blancs sur carré S numérotées de 1 à $m\times m$

$Card\,\Omega(X)=2^{m\times m}$

Soit p_i la probabilité de la configuration numéro i

Simulation directe de X par la méthode de fonction de répartition inverse pour variable discrète : pas efficace car $\Omega(X)$ trop riche

1.b. On a $X=(X_s)_{s\in S}$. Soit $x=(x_s)_{s\in S}$ une réalisation possible

si les X_s sont indépendants alors $P(X=x)=\prod_{s\in S}P(X_s=x_s)$

Simulation : simuler chaque X_s indépendamment des autres, soit simuler $m\times m$ v.a. de Bernouilli (méthode de fonction de répartition inverse pour variable discrète : tirer u selon loi uniforme sur $[0,1]$, si $u<P(X_s=0)$ alors on pose $x_s=0$ et $x_s=1$ sinon)

1.c. cf. polycopié page 33

Echantillonneur de Gibbs simplifié par rapport au polycopié page 35 : les distributions conditionnelles à toutes les autres composantes sont remplacées par les distributions conditionnelles au voisinage

2.a. Méthode des lois marginales : on simule X à l'aide d'une des méthodes de la partie 1 de l'exercice, puis chaque Y_s étant indépendants conditionnellement à X , on simule chaque Y_s avec $f_{Y_s|X_s=0}$ si $x_s=0$ ou $f_{Y_s|X_s=1}$ sinon.

Les densités $f_{Y_s|X_s=0}(y_s)$ et $f_{Y_s|X_s=1}(y_s)$ sont simulées avec technique décrite en page 28 du poly

2.b. En simulant un grand nombre de couples (X,Y) et en testant chaque méthode sur tous ces couples, on peut calculer un taux de classification pour chaque méthode (loi des gds nbres) et construire ainsi un élément de comparaison : la meilleure technique aura le meilleur taux.

Exercice 3

Attention ici les éléments finis ne sont plus des triangles, mais des carrés !

$a_0=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $a_1=(0,0)$, $a_2=(1,0)$, $a_3=(1,1)$, $a_4=(0,1)$, $a_5=(\frac{1}{2},0)$, $a_6=(1,\frac{1}{2})$,
$a_7=(\frac{1}{2},1)$, $a_8=(0,\frac{1}{2})$

1. Montrer que Σ est Q-unisolvant. Soit le 9-uplet $\beta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6,\beta_7,\beta_8)$, montrer qu'il existe un unique $p\in Q$ (soit $p(x,y)=\alpha_{00}+\alpha_{10}x+\alpha_{01}y+\alpha_{11}xy+\alpha_{20}x^2+\alpha_{02}y^2+\alpha_{12}xy^2+\alpha_{21}x^2y+\alpha_{22}x^2y^2$) tel que $p(a_i)=\beta_i$ pour $0\leqslant i\leqslant 8$

Il y a différentes manières de démontrer que le système a une solution unique. Si on le résout, on obtient :

$\alpha_{00}=\beta_1$, $\alpha_{01}=-3\beta_1-\beta_2+4\beta_5$, $\alpha_{02}=2\beta_1+2\beta_2-4\beta_5$, $\alpha_{10}=-3\beta_1-\beta_4+4\beta_8$,
$\alpha_{20}=2\beta_1+2\beta_4-4\beta_8$, $\alpha_{11}=16\beta_0+9\beta_1+3\beta_2+\beta_3+3\beta_4-12\beta_5-4\beta_6-4\beta_7-12\beta_8$,

$\alpha_{12}=-16\beta_0-6\beta_1-6\beta_2-2\beta_3-2\beta_4+12\beta_5+8\beta_6+4\beta_7+8\beta_8$,
$\alpha_{21}=-16\beta_0-6\beta_1-2\beta_2-2\beta_3-6\beta_4+8\beta_5+4\beta_6+8\beta_7+12\beta_8$,
$\alpha_{22}=16\beta_0+4\beta_1+4\beta_2+4\beta_3+4\beta_4-8\beta_5-8\beta_6-8\beta_7-8\beta_8$.

Les fonctions de bases s'obtiennent pour les 9-uplets particuliers suivants $\beta^0=(1,0,0,0,0,0,0,0,0)$, $\beta^1=(0,1,0,0,0,0,0,0,0)$ et $\beta^3=(0,0,0,1,0,0,0,0,0)$; soit par exemple $p_0(x,y)=16xy(x-1)(y-1)$ (on vérifie que le polynôme s'annule bien en tous les autres points autres que a_0)

2. Comme en TD, il suffit de compter les points intérieurs (sommets des carrés : 2, milieux des carrés : 6 et milieux des côtés : 7). La dimension du système est 15.

3. On numérote les fonctions φ (de 1 à 15) de gauche à droite et de bas en haut. Au plus grossier, on peut dire que le support de la fonction φ associée aux point a_3 (soit φ_7) sont les carrés K1, K2, K4 et K5 et celui de la fonction φ associée aux point a_0 (soit φ_1) est le carré K1. φ_1 sera exactement la fonction de base p_0 associée au carré K1 calculée dans la question précédente. La restriction de φ_7 à K1 sera exactement la fonction de base p_3 associée au carré K1 calculée dans la question précédente. La restriction de φ_7 à K5 sera la fonction de base p_1 associée au carré K5 (calculée sur K1, reste à translater sur K5). La restriction de φ_7 à K2 sera la fonction de base p_4 associée au carré K2 (qui reste à calculer). La restriction de φ_7 à K4 sera la fonction de base p_2 associée au carré K4 (qui reste à calculer).

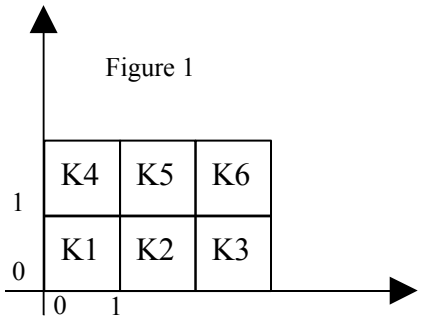


Figure 1

4. On rappelle que A est composée des éléments $a_{ij}=\int_D\left(\frac{\partial\varphi_i(x,y)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_i(x,y)}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j(x,y)}{\partial y}\right)dxdy$.

On voit de suite que a_{ij} sera nul si les supports de φ_i et φ_j ont une intersection vide. D'où la matrice A symétrique

$$\begin{bmatrix}
x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x & x & x & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0\\
x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0\\
0 & x & x & x & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & x & x & x & 0\\
0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x\\
0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & x & x & x & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x
\end{bmatrix}$$

Institut National des Télécommunications
Télécom INT, EI1, Module AN12, année scolaire 2006/07
Coordonnateur : Annabelle Joannic-Chardin

Analyse Numérique

Examen du 26 mars 2007
Durée : 1 heure 30
Seule une feuille manuscrite A4 recto-verso est autorisée

N.B. Les exercices sont indépendants.

Exercise 1

On cherche à résoudre un problème de Neumann par la méthode des éléments finis.
On définit le problème de Neumann par la donnée d'un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ $\mathcal{C}^1$ par morceaux et on considère le problème suivant : étant donné une fonction f de $L^2(\Omega)$, trouver une fonction u définie sur Ω et solution de

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + u = f \text{ dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

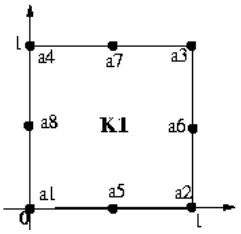
1. Montrer que la formulation variationnelle de ce problème consiste à trouver u tel que pour tout v suffisament régulière, $a(u,v) = L(v)$ avec

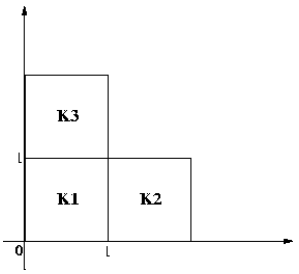
$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy + \int_\Omega uv\,dx\,dy \quad \text{et} \quad L(v) = \int_\Omega fv\,dx\,dy$$

   On rappelle la formule de de Stockes :

$$-\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) v\,dx\,dy = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial v} v\,d\sigma$$

2. On considère le carré $K_1 = [0,1]^2$ ci-dessous et $\Sigma = \{a_i\}_{i=1\ldots8}$ l'ensemble des sommets et des milieux des côtés de K. On appelle P l'ensemble des polynômes p de la forme $p(x) = c_0 + c_1x + c_2y + c_3x^2 + c_4y^2 + c_5xy + c_6x^2y + c_7xy^2$.
   Montrer que (K, Σ, P) est un élément fini de Lagrange. Exhiber les fonctions de base associées aux points a_1 et a_8.





3. On s'intéresse à un domaine Ω constitué de l'union des trois carrés K_1, K_2 et K_3 de la figure ci-dessus. Ces derniers forment donc une triangulation de Ω.
   La méthode des éléments finis consiste à construire un ensemble de fonctions de dimension finie, dans lequel on recherche la solution au problème, ainsi qu'une base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ de cet ensemble. Quelle est la dimension N de cet ensemble ? (Attention ! ici $u \neq 0$ sur Γ.)

4. A l'aide de la base, montrer que la formulation variationnelle $a(u, v) = L(v)$ revient à résoudre un système d'équations de type $Au = b$. Représenter la matrice A en mettant une croix lorsque l'élément est non nul et 0 sinon.
5. Proposer, sans les décrire, des méthodes numériques de résolution du système.
6. On souhaite plus de précision sur K_2 et on le découpe en quatre triangles identiques selon les diagonales du carré. Est-il possible d'envisager une triangulation faisant intervenir simultanément des carrés et des triangles ? Si oui, quelle est la dimension du nouvel ensemble de solutions ?

Exercise 2

Considérons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 10^{-17}x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array} \right.$$

1. Donner une solution approchée intuitive.
2. Résoudre le système à l'aide de la méthode de Gauss et proposer les lignes de code Scilab mettant en œuvre cette résolution.
3. Si l'on exécutait les commandes ci-dessus, on constaterait que Scilab renvoie le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par contre, en permutant les deux équations, Scilab donne la bonne solution. Comment peut-on expliquer ce phénomène ?

Exercise 3

On cherche à simuler une réalisation d'une variable aléatoire de densité $f(x) = C \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathbb{1}_{x \geq \theta}$, avec μ, σ et θ fixés et C une constante de normalisation.

1. Comment peut-on générer des échantillons d'une loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.
2. Proposer une méthode de simulation de f à partir d'une loi gaussienne.
3. On prend maintenant $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. Considérons la densité d'une loi exponentielle translatée $g_\alpha(x) = \alpha \exp(-\alpha(x - \theta))\mathbb{1}_{x \geq \theta}$.
   Montrer que l'on peut appliquer une méthode d'acceptation-rejet avec g_α pour simuler f et déterminer le choix optimal de α pour minimiser la probabilité de rejet. (Pour cela, on cherchera une borne supérieure pour f/g_α en dissociant les cas $\alpha \geq \theta$ et $\alpha \leq \theta$).

Corrigé plus ou moins succinct du sujet d'AN12 du 26 mars 2007

Exercise 1

1. On obtient la forme variationnelle en multipliant l'équation par v et en intégrant sur Ω :

$$-\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) v\,dx\,dy+\int_\Omega uv\,dx\,dy=\int_\Omega fv\,dx\,dy$$

En utilisant la formule de Stockes :

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial v}v\,d\sigma+\int_\Omega uv\,dx\,dy=\int_\Omega fv\,dx\,dy$$

Les conditions sur Γ donnent $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial v}v\,d\sigma=0$, d'où l'équation :

$$\underbrace{\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy+\int_\Omega uv\,dx\,dy}_{=a(u,v)}=\underbrace{\int_\Omega fv\,dx\,dy}_{=L(v)}$$

2. Deux solutions sont possibles : soit on résout 3 systèmes 8×8 très simples (second membre nul ou presque), soit on traite un seul système 8×8 un peu complexe. Pour aller plus vite, on remarquera que l'on peut découper la résolution en 4 sous-sytèmes : un de taille 1×1 (1), 2 similaires de taille 2×2 ((2)+(5) et (3)+(8)) et un dernier de taille 3×3 ((4)+(6)+(7)).

$$\begin{aligned}
p(a_1)=p(0,0) &= c_0 && (1)\\
p(a_2)=p(1,0) &= c_0+c_1+c_3 && (2)\\
p(a_3)=p(1,1) &= c_0+c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6+c_7 && (3)\\
p(a_4)=p(0,1) &= c_0+c_2+c_4 && (4)\\
p(a_5)=p(\frac{1}{2},0) &= c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_3}{4} && (5)\\
p(a_6)=p(1,\frac{1}{2}) &= c_0+c_1+\frac{c_2}{2}+c_3+\frac{c_4}{4}+\frac{c_5}{2}+\frac{c_6}{2}+\frac{c_7}{4} && (6)\\
p(a_7)=p(\frac{1}{2},1) &= c_0+\frac{c_1}{2}+c_2+\frac{c_3}{4}+c_4+\frac{c_5}{2}+\frac{c_6}{4}+\frac{c_7}{2} && (7)\\
p(a_8)=p(0,\frac{1}{2}) &= c_0+\frac{c_2}{2}+\frac{c_4}{4} && (8)
\end{aligned}$$

– La moins sujette à erreur : on voit immédiatement que $\dim(P)=\mathrm{Card}(\Sigma)$; il reste à montrer que le seul polynôme qui s'annule sur Σ est le polynôme identiquement nul, c'est-à-dire

$$\forall i=1\dots 8, p(a_i)=0 \iff \forall j=0\dots 7, c_j=0$$

Ceci démontre que (K,Σ,P) est un élément fini de Lagrange.
Pour trouver p_1, il faut résoudre le système $p(a_1)=1$ et $\forall i=2\dots 8, p(a_i)=0$.
Pour trouver p_8, il faut résoudre le système $p(a_8)=1$ et $\forall i=1\dots 7, p(a_i)=0$.

– La plus complète : on se donne un 8-uplet $(\alpha_1,\dots,\alpha_8)$ et on résout le système $p(a_i)=\alpha_i$

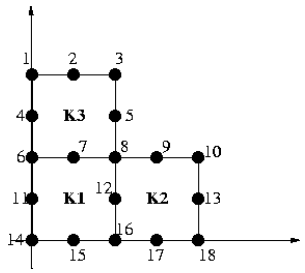
pour $i = 1 \dots 8$. On obtient

$$\begin{cases} c_0 = \alpha_1 \\ c_1 = -3\alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_5 \\ c_2 = -3\alpha_1 - \alpha_4 + 4\alpha_8 \\ c_3 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\alpha_5 \\ c_4 = 2\alpha_1 + 2\alpha_4 - 4\alpha_8 \\ c_5 = 5\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 - \alpha_4 - 4\alpha_5 + 4\alpha_6 + 4\alpha_7 - 4\alpha_8 \\ c_6 = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 4\alpha_5 - 4\alpha_7 \\ c_7 = -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - 2\alpha_4 - 4\alpha_6 + 4\alpha_8 \end{cases}$$

Ceci démontre que (K, Σ, P) est un élément fini de Lagrange. Pour obtenir p_1, il suffit de remplacer α_1 par 1 et les autres α_i par 0. De même pour p_8, on prend $\alpha_8 = 1$ et tous les autres nuls.

Finalement on a $p_1(x, y) = 1 - 3(x + y) + 2(x^2 + y^2) + 5xy - 2(x^2y + xy^2) = 2(1 - x)(1 - y)(\frac{1}{2} - x - y)$ et $p_8(x, y) = 4y - 4y^2 - 4xy + 4xy^2 = 4y(1 - x)(1 - y)$

3. Comme $u \neq 0$ sur Γ, on doit considérer tous les points de la triangulation, y compris ceux de la frontière, soit 18.
4. Pour la démonstration, voir la page 39 du polycopié : $A = (a(\varphi_i, \varphi_j))_{1 \leq i,j \leq 18}$.



En prenant la numérotation ci-dessus et sachant que A est symétrique, on peut se contenter de donner le triangle inférieur de A :

$$A = \begin{bmatrix}
x & & & & & & & & & & & & & & & & \\
x & x & & & & & & & & & & & & & & & \\
x & x & x & & & & & & & & & & & & & & \\
x & x & x & x & & & & & & & & & & & & & \\
x & x & x & x & x & & & & & & & & & & & & \\
x & x & x & x & x & x & & & & & & & & & & & \\
x & x & x & x & x & x & x & & & & & & & & & & \\
x & x & x & x & x & x & x & x & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & x & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & x & x & x & x & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & x & x & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & x & x & 0 & x & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & x & x & 0 & x & x & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & x & x & 0 & 0 & x & x & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & x & x & 0 & 0 & x & x & x
\end{bmatrix}$$

5. Voir 1er chapitre du polycopié
6. Pour que cela soit possible, il faut au moins que les points des éléments finis de chaque géométrie correspondent. Il faudra donc choisir les triangles de type (2) du cours. Il faudra aussi s'assurer que les fonctions de base coincident sur les frontières communes à des éléments

finis de géométrie différente. Dans l'hypothèse où ces conditions étaient remplies, la dimension serait de 18+5=23.

Exercise 2

1. Solution approchée intuitive : $(x, y) = (1, 1)$.
2. Résolution par la méthode de Gauss

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 10^{-17}x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 10^{-17}x & + & y & = & 1 \\ & & (1-\frac{1}{10^{-17}})y & = & 2-\frac{1}{10^{-17}} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1-y}{10^{-17}} \\ y = \frac{2.10^{-17}-1}{10^{-17}-1} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x = \frac{1}{1-10^{-17}} & \sim & 1 \\ y = \frac{2.10^{-17}-1}{10^{-17}-1} & \sim & 1 \end{array}\right.$$

Code Scilab correspondant :

```
--> A=[1e-17 1 ;1 1] ;b=[1 2]' ;
--> b(2) = b(2) - b(1)*A(2,1)/A(1,1) ;
--> A(2, :) = A(2, :) - A(1, :)*A(2,1)/A(1,1) ;
--> y = b(2)/A(2,2) ;
--> x = (b(1)-A(1,2)*y)/A(1,1)
```

3. Contrairement au calcul littéral qui conserve toute la précision numérique pour obtenir x, l'algorithme calcule la valeur de y avant de l'utiliser dans la formule $x = \frac{1-y}{10^{-17}}$. Or comme $10^{-17} << 1$, Scilab approxime y par 1 (c'est une erreur d'arrondi) et par suite x est donc égal à 0.
   En inversant les deux équations, la formule de calcul de x devient $x = 2 - y$ et on obtient alors la bonne solution puisque x sera approximé par 1.

Exercise 3

Remarque : f est une densité si $C = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}(1-F(\theta))}$, avec F la fonction de répartition de $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$; θ, μ et σ étant connus, $F(\theta)$ est calculable et par suite C aussi.

1. Voir chapitre 2, paragraphe 2.2 du polycopié.
2. f est une gaussienne tronquée : on n'accepte que les réalisations supérieures à θ. On peut alors utiliser une méthode d'acceptation-rejet avec g la gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (densité simulable, cf question précédente) et $M = \frac{1}{1-F(\theta)}$.
3. Pour montrer que l'on peut appliquer une méthode d'acceptation-rejet avec g_α pour simuler f, il faut montrer que g_α est bien une densité simulable, puis trouver un majorant du rapport f/g_α.
   - g_α est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_\alpha(x)\,dx = 1$: donc g_α est bien une densité.
   - Montrons que l'on peut simuler g_α par la méthode de la fonction de répartition inverse.

$$G_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{x} g_\alpha(t)\,dt = \int_{\theta}^{x} \alpha\exp(-\alpha(t-\theta))\,dt = (1-\exp(-\alpha(x-\theta))) \quad \text{si } x \geq \theta$$

   Recherchons l'inverse de G_α : soit $u \in [0,1]$, on a $G_\alpha(x) = u \iff x = \theta - \frac{1}{\alpha}\log(1-u)$. Ceci est cohérent avec $x \geq \theta$ car $\log(1-u) \leq 0$. Pour tirer un échantillon selon g_α, il suffit donc de tirer une réalisation u uniforme sur $[0,1]$ et d'appliquer la formule ci-dessus.
   - Calculons le rapport f/g_α sur l'intervalle $[\theta, +\infty[$.

$$\frac{f(x)}{g_\alpha(x)} = \frac{C}{\alpha}\exp(-\frac{x^2}{2} + \alpha x - \alpha\theta) = \frac{C}{\alpha}e^{h(x)} \quad \text{avec } h(x) = -\frac{x^2}{2} + \alpha x - \alpha\theta$$

   Pour trouver M tel que $f \leq Mg_\alpha$, il faut trouver le maximum de h (car exp est croissante). On a $h'(x) = \alpha - x$. Les variations de h dépendent de la position de α par rapport à θ.

– Si $\alpha \leq \theta$, alors $h'(x) \leq 0$ et h est décroissante sur $[\theta, +\infty[$, donc son maximum est $h(\theta) = -\frac{\theta^2}{2}$. On aura alors $M = \frac{C}{\alpha} e^{-\frac{\theta^2}{2}}$.
– Si $\alpha \geq \theta$, alors on a le tableau de variation suivant :

x	θ		α	
h'		+	⋮	-
h		↗	⋮	↘

Le maximum de h est donc $h(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - \alpha\theta$. On aura alors $M = \frac{C}{\alpha} e^{\frac{\alpha^2}{2} - \alpha\theta}$.

On sait que la probabilité d'acceptation de la méthode est $\frac{1}{M}$. Pour déterminer le choix optimal de α, il faut donc trouver le minimum de la fonction suivante :

$$M(\alpha) = \begin{cases} \frac{C}{\alpha} e^{-\frac{\theta^2}{2}} & \text{si } \alpha \leq \theta \\ \frac{C}{\alpha} e^{\frac{\alpha^2}{2} - \alpha\theta} & \text{si } \alpha \geq \theta \end{cases}$$

Le tableau de variation de $M(\alpha)$ donne :

α		θ		$\frac{1}{2}(\theta + \sqrt{4+\theta^2})$		
M'	-	⋮	-	⋮		+
M	↘	⋮	↘	⋮		↗

Finalement la probabilité de rejet sera minimale lorsque M sera minimum, soit pour $\alpha = \frac{1}{2}(\theta + \sqrt{4+\theta^2})$.

Institut National des Télécommunications
Télécom INT, EI1, Module AN12, année scolaire 2006/07
Coordonnateur : Annabelle Joannic-Chardin

Analyse Numérique

Examen du 14 mai 2007
Durée : 1 heure 30
Seule une feuille manuscrite A4 recto-verso est autorisée

N.B. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

On s'intéresse à la résolution numérique d'un système linéaire de la forme $Ax = b$ et de taille N. On note $\tilde{v}$ la solution numérique approchée et on calcule le conditionnement par rapport à l'inversion et le résidu $R = \max_{i=1,\dots,N} |(A\tilde{v})_i - b_i|$.

1. Rappeler brièvement la définition du conditionnement d'une matrice par rapport à l'inversion.
2. On connaît par ailleurs la solution vraie v. On peut alors calculer l'erreur absolue $E = \max_{i=1,\dots,N} |v_i - \tilde{v}_i|$ et on obtient le tableau ci-dessous.

N	cond	R	E
4	$1,5.10^{4}$	2.10^{-16}	3.10^{-13}
8	$1,5.10^{10}$	9.10^{-16}	4.10^{-7}
10	$1,6.10^{13}$	0	0,001
12	$1,7.10^{16}$	2.10^{-15}	0,3
14	5.10^{17}	1.10^{-15}	42,7

   Que peut-on en déduire sur le système ?
   Le résidu est-il une quantité pertinente pour évaluer la qualité du résultat ? Pourquoi ?
3. Ecrire les commandes Scilab permettant d'obtenir les valeurs du tableau ci-dessus en supposant qu'il existe déjà par ailleurs la fonction `matriceA(N)` qui fabrique A en fonction de N, de même `vecteurb(N)` pour b et `vraie(N)` pour v.

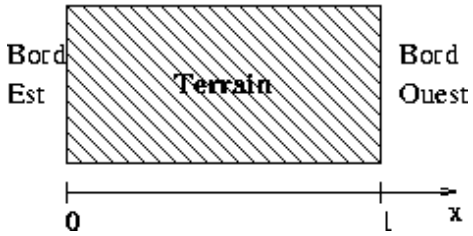
Exercice 2

Dans le cadre d'un challenge de robotique, vous devez construire un robot ramasseur de balle. Pour tester l'algorithme de détection de balles, il faut créer une vue du dessus du terrain de jeu avec n ronds répartis au hasard. Le terrain est un rectangle de taille 1 m par 50 cm.

1. Dans un premier temps, on simule la position des centres des balles et on supposera que les balles sont réparties de manière uniforme sur le terrain. Les variables aléatoires modélisant les abscisses X et les ordonnées Y sont-elles indépendantes ? Proposer une méthode de simulation du couple (X, Y).
2. Dans un deuxième temps, on veut prendre en compte l'épaisseur des balles de rayon $r = 2$ cm. Comment faire à partir de la simulation précédente ? Peut-on réaliser une simulation prenant directement en compte cette contrainte ?
3. Sur le terrain, il y a en fait des balles de deux couleurs : orange et vert. Pour gagner, votre robot ne doit ramasser que les balles vertes. On sait que

– les balles oranges sont deux fois plus nombreuses que les vertes ;
– les balles oranges sont réparties uniformément sur le terrain ;
– les balles vertes sont plus concentrées aux bords Est et Ouest du terrain : si x représente la distance du centre d'une balle verte depuis le bord Est, alors la densité de probabilité des abscisses des balles vertes est de la forme $f(x) = 2(3x^2 - 3x + 1)$.

Comment simuler la configuration initiale du terrain ?



Exercice 3

On considère le prisme K de sommets $\Sigma = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ avec $s_1 = (1, 0, 0)$, $s_2 = (0, 1, 0)$, $s_3 = (0, 0, 0)$, $s_4 = (1, 0, 1)$, $s_5 = (0, 1, 1)$ et $s_6 = (0, 0, 1)$. Soit Q l'ensemble des polynômes de trois variables de degré inférieur ou égal à 1 par rapport à chaque variable et P l'ensemble des polynômes de trois variables de la forme $p(x, y, z) = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4xz + c_5yz$.

1. (K, Σ, Q) et (K, Σ, P) sont-ils des éléments fini de Lagrange ? Justifier.
2. Donner les fonctions de base de (K, Σ, P).
3. Soit $\hat{K}$ le prisme de sommets $\hat{\Sigma} = \{\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3, \hat{s}_4, \hat{s}_5, \hat{s}_6\}$ avec $\hat{s}_1 = s_1$, $\hat{s}_2 = s_2$, $\hat{s}_3 = (1, 1, 0)$, $\hat{s}_4 = s_4$, $\hat{s}_5 = s_5$ et $\hat{s}_6 = (1, 1, 1)$. Donner la fonction affine de $\mathbb{R}^3$ qui transforme K en $\hat{K}$. En déduire que (K, Σ, P) et $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, P)$ sont des éléments finis affine-équivalents.
4. Exhiber les fonctions de base de $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, P)$ associées à $\hat{s}_3$ et $\hat{s}_5$.
5. On veut utiliser ces éléments finis pour obtenir une approximation du problème de Dirichlet dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ et en dehors de } \Omega \end{cases}$$

avec Ω un cube de côté 3 et Γ l'ensemble de ces faces.
En s'inspirant de la méthode du cours sur $\mathbb{R}^2$, proposer un espace de dimension finie dans lequel rechercher la solution approchée au problème de Dirichlet. Préciser sa dimension.

Corrigé très succinct du sujet d'AN12 du 14 mai 2007

Exercice 1

1. voir cours chapitre 1
2. Le conditionnement augmente avec N, donc la résolution du système risque de poser des problèmes numériques si l'on se trompe sur le second membre lorsque le système devient grand.
   Le résidu est intéressant car son calcul ne nécessite pas la connaissance de la solution vraie contrairement à l'erreur absolue. Mais il n'est pas une bonne indication car il reste toujours quasiment nul alors que l'erreur augmente.
3. Code Scilab

```
--> N=[4, 8 :2 :14] ;
--> for i=1 :length(N)
--> A=matriceA(N(i)) ; b=vecteurb(N(i)) ; v=vraie(N(i)) ;
--> C(i)=cond(A) ;
--> x=A\b ; R(i)=max(abs(A*x-b)) ; E(i)=max(abs(v-x)) ;
--> end
```

Exercice 2

1. La répartition étant uniforme sur tout le terrain T rectangle, X et Y sont indépendants car $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\text{Aire de } T}\mathbb{1}_{(x,y)\in T} = 2\mathbb{1}_{[0,1]\times[0,\frac{1}{2}]}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. On peut alors les simuler séparément avec X suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ que l'on sait simuler avec les ordinateurs et Y suivant une loi uniforme sur $[0,\frac{1}{2}]$ que l'on simule par la méthode de la fonction de répartition inverse.
2. On balaye tous les points et on élimine tous ceux qui sont à moins de 2 cm du bord ou d'un autre point.
   Simulation directe : à chaque tirage d'une nouvelle coordonnée de centre de balle, on ne la conserve que si le centre est à moins de 2 cm du bord ou d'un autre point déjà tiré.
3. méthode des lois marginales : on tire la couleur (loi discrète à deux valeurs, l'une de proba $\frac{1}{3}$ (pour le vert) et l'autre de $\frac{2}{3}$ (pour l'orange)), puis si la balle est orange, on tire X uniformément dans $[0,1]$ et Y uniformément dans $[0,\frac{1}{2}]$ (cf 1ère question) et si la balle est verte, on tire X selon sa loi en utilisant une méthode d'acceptation-rejet avec g la loi uniforme sur $[0,1]$ et $M=2$ et toujours Y uniformément dans $[0,\frac{1}{2}]$.

Exercice 3

1. $\text{Card}(\Sigma) = 6$. Or $\dim(Q) = 8 \neq \text{Card}(\Sigma)$, donc (K,Σ,Q) n'est pas un élément fini.
   $\dim(P) = 6 = \text{Card}(\Sigma)$ et le seul polynôme qui s'annule sur Σ est le polynôme identiquement nul, donc (K,Σ,P) est un élément fini.
2. $p_1(x,y,z) = x(1-z)$, $p_2(x,y,z) = y(1-z)$, $p_3(x,y,z) = (1-x-y)(1-z)$, $p_4(x,y,z) = xz$, $p_5(x,y,z) = yz$ et $p_6(x,y,z) = z(1-x-y)$
3. On peut montrer que $\hat{\Sigma} = F(\Sigma)$ avec
   $F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + b \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   A est inversible donc F aussi, et P est invariant par une fonction affine inversible, donc $(\hat{K},\hat{\Sigma},P)$ est un élément fini affine-équivalent à (K,Σ,P).
4. $\hat{p}_3(x,y,z) = p_3(1-y,1-x,z) = (x+y-1)(1-z)$ et $\hat{p}_5 = z(1-x)$

5. l'espace des solutions est $E_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}); \forall K \in \Phi_h, v_{|K} \in P \text{ et } v_{|\Gamma} = 0\}$ avec Φ_h la triangulation du cube Ω obtenue avec les prismes étudiés précédemment.
La dimension de E_h est la taille de sa base que l'on définit en chaque nœud de la triangulation n'appartenant pas à la frontière (car u est nulle sur Γ), soit 8.

TELECOM SudParis, EI1, Module MAT 3501, année scolaire 2007/08
Coordonnateur : Annabelle Joannic-Chardin

Analyse Numérique

Examen du 31 mars 2008
Durée : 1 heure 30
Aucun document, ni calculatrice ne sont autorisés

N.B. Les exercices sont indépendants et ainsi que certaines questions d'un même exercice.

Exercice 1 *Influence du conditionnement*

On rappelle la définition de la norme 1 vectorielle sur $\mathbb{R}^n$, ainsi que celle de la norme matricielle associée :

$$\|x\|_1 = \sum_{1\leq i\leq n} |x_i| \qquad \|A\|_1 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}.$$

1. Montrer que $\|A\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{1\leq i\leq n} |A_{ij}|$.

   Pour cela, poser $\alpha = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{1\leq i\leq n} |A_{ij}|$ et montrer l'inégalité $\alpha \leq \|A\|_1$ et l'inégalité inverse.

2. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Calculer le conditionnement de A en norme 1.
   (b) Considérons les systèmes suivants : $Ax = \begin{bmatrix} 100 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $A(x+\delta x) = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   Calculer la variation relative $\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1}$ et celle du second membre. Quel est le facteur d'amplitude de l'erreur ? Comparer avec le conditionnement.
   (c) Ecrire les commandes Matlab résolvant les deux questions précédentes.

Exercice 2 *Éléments finis*

On considère le prisme K de sommets $\Sigma = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ avec $s_1 = (0,0,0)$, $s_2 = (0,1,0)$, $s_3 = (0,0,1)$, $s_4 = (1,0,0)$, $s_5 = (1,1,0)$ et $s_6 = (1,0,1)$. Soit P l'ensemble des polynômes de trois variables de la forme $p(x,y,z) = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4xy + c_5xz$.

1. Montrer que (K, Σ, P) est un élément fini de Lagrange.
2. Donner les fonctions de forme de (K, Σ, P).
3. On veut utiliser les éléments finis de type (K, Σ, P) pour obtenir une approximation du problème de Dirichlet dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ et en dehors de } \Omega \end{cases}$$

   avec Ω un parallèlépipède de sommets $(0,0,0)$, $(0,4,0)$, $(2,0,0)$, $(2,4,0)$, $(0,0,3)$, $(0,4,3)$, $(2,0,3)$, $(2,4,3)$ et Γ l'ensemble de ces faces.
   En s'inspirant de la méthode du cours sur $\mathbb{R}^2$, proposer un espace de dimension finie dans lequel rechercher la solution approchée au problème de Dirichlet. Préciser sa dimension.

4. À l'aide de la base, on sait que la formulation variationnelle $a(u,v) = L(v)$ revient à résoudre un système d'équations de type $Au = b$. Représenter la matrice A en mettant une croix lorsque l'élément est non nul et 0 sinon, en ayant numéroté les nœuds de la triangulation de gauche à droite, puis de haut en bas.
5. Donner la valeur du premier élément de A.

Exercice 3 *Variante de l'algorithme d'acceptation-rejet*

On considère une caméra de vidéosurveillance d'une société. Sa durée de vie est Z qu'on supposera aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1 (rappel : une loi exponentielle de paramètre λ a pour densité : $h(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$).

On supposera que l'instant d'arrivée du premier employé aux plages d'ouverture des portes est Y et que Y suit une loi de densité $g(y) = \mathbb{1}_{\{0\leq y\leq 1\}} a y^{a-1}$.

On s'intéresse à X instant d'arrivée du premier employé **détecté par la caméra**. On peut montrer que la loi de X est la loi de Y conditionnellement au fait que la caméra est en état de marche. On admettra que la loi de X a pour densité $f(x) = c\left(\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq 1\}} a x^{a-1}\right) e^{-x}$.

1. Comment simuler Z ?
2. Proposer et décrire une méthode pour simuler Y.
3. A quelle condition peut-on simuler suivant f à l'aide de l'algorithme d'acceptation-rejet avec g pour densité simulable ? En utilisant un résultat du cours, donner la probabilité d'acceptation sans calcul.
4. Nous nous intéressons maintenant à une variante de l'algorithme d'acceptation-rejet. On considère qu'une densité f peut s'écrire sous la forme $f(x) = cg(x)\left(1 - \int_{-\infty}^{x} h(u)du\right)$ où c est une constante, g et h sont des densités. On notera dans la suite $H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(u)du$, la fonction de répartition associée à la densité h. On remarquera que H est comprise entre 0 et 1.
   On se propose de simuler une variable aléatoire X de densité f de la manière suivante :

   ALGORITHME DE VADUVA

   i) Simuler indépendamment Y suivant la densité g et Z suivant la densité h.
   ii) Si $Y < Z$ alors poser $X = Y$. Sinon, retourner en i.

   On simule ainsi indépendamment $Y_1, Y_2, \ldots$ suivant g et $Z_1, Z_2, \ldots$ suivant h et on pose $X = Y_T$ où T est le premier entier pour lequel la condition $\{Y_T < Z_T\}$ est vérifiée.
   (a) Montrer que $c = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} g(x)(1-H(x))dx}$ et donc que c est supérieur à 1.
   (b) Nous allons montrer que la variable X simulée par l'algorithme de Vaduva suit bien une loi de densité f.
      i. Montrer que $P(Y < x \text{ et } Y < Z) = \int_{-\infty}^{x} g(y)(1 - H(y))dy$.
      En déduire que $P(Y < Z) = 1/c$.
      ii. Montrer que $P(X < x \text{ et } T = k) = \prod_{i=1}^{k-1} P(Y_i \geq Z_i) P(Y_k < x \text{ et } Y_k < Z_k)$.
      iii. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P(X < x)$ et en déduire que f est la densité de X.
   (c) Calculer la probabilité d'acceptation de l'algorithme de Vaduva.
5. Comparer l'algorithme d'acceptation-rejet avec celui de Vaduva.
6. Indiquer comment on peut appliquer l'algorithme de Vaduva pour simuler la variable X de la vidéosurveillance, en n'utilisant que des variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0,1]$.
   Donner le code matlab réalisant cet algorithme.

Corrigé rapide de l'examen du 31 mars 2008 d'Analyse Numérique

Exercice 1 *Influence du conditionnement*

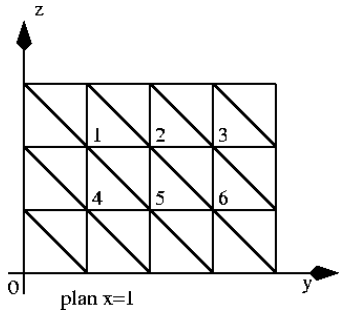
1. Montrons que $\alpha \geq \|A\|_1$.
   Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors $\|Ax\|_1 = \sum_{1\leq i\leq n} |\sum_{1\leq j\leq n} A_{ij}x_j| \leq \sum_{1\leq i\leq n}\sum_{1\leq j\leq n} |A_{ij}||x_j|$.
   Donc $\|Ax\|_1 \leq \sum_{1\leq j\leq n} |x_j| \left(\sum_{1\leq i\leq n} |A_{ij}|\right) \leq \sum_{1\leq j\leq n} \alpha|x_j|$ car $\sum_{1\leq i\leq n} |A_{ij}| \leq \alpha$ par définition de α.
   Comme α ne dépend pas de j, on en déduit que $\|Ax\|_1 \leq \alpha\|x\|_1$. Puisque cette inégalité est vraie pour tout x et que α est indépendant de x, on peut passer au max. CQFD

   Montrons que $\alpha \leq \|A\|_1$.
   Il existe k tel que $\alpha = \sum_{1\leq i\leq n} |A_{ik}|$. Soit y le vecteur composé que de 0, sauf sa $k^{\text{ième}}$ composante qui vaut 1.
   Alors $\|Ay\|_1 = \sum_{1\leq i\leq n} |A_{ik}| = \alpha$ et $\|y\|_1 = 1$. D'où $\alpha = \frac{\|Ay\|_1}{\|y\|_1} \leq \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \|A\|_1$. CQFD
2. Application
   (a) On rappelle que $\text{Cond}_1 A = \|A\|_1\|A^{-1}\|_1$. Or $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   Donc $\|A\|_1 = 100 + 1 = 101$ et $\|A^{-1}\|_1 = |-100| + 1 = 101$. D'où $\text{Cond}_1 A = 101^2$.
   (b) Les systèmes $Ax = \begin{bmatrix} 100 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $A(x+\delta x) = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$ ont respectivement pour solution $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $x + \delta x = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$. Donc $\delta x = \begin{bmatrix} 100 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\Delta x = \frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1} = \frac{101}{1} = 101$.
   La variation relative du second membre $\Delta b = \frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1}$ avec $b = \begin{bmatrix} 100 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vaut $\frac{1}{101}$.
   Le facteur d'amplification de l'erreur vaut $\frac{\Delta x}{\Delta b} = 101^2 = \text{Cond}_1 A$.

Exercice 2 *Éléments finis*

1. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$. On montre qu'il existe un unique polynôme p de P tel que $\forall i = 1 \ldots 6,\ p(s_i) = \alpha_i$. C'est le polynôme de la forme $p(x,y,z) = \alpha_1 + (\alpha_4 - \alpha_1)x + (\alpha_2 - \alpha_1)y + (\alpha_3 - \alpha_1)z + (\alpha_5 + \alpha_1 - \alpha_4 - \alpha_2)xy + (\alpha_6 + \alpha_1 - \alpha_4 - \alpha_3)xz$.
2. $p_1(x,y,z) = (1-x)(1-y-z)$, $p_2(x,y,z) = y(1-x)$, $p_3(x,y,z) = z(1-x)$, $p_4(x,y,z) = x(1-y-z)$, $p_5(x,y,z) = xy$ et $p_6(x,y,z) = xz$.
3. On pave le parallèlépipède avec des carrés de côté 1, que l'on recoupe en deux pour obtenir des prismes comme étudiés ci-dessus. On obtient une triangulation Φ_h du domaine Ω contenant 48 prismes. L'espaces des solutions E_h est l'ensemble des fonctions v continues dans Ω telles que $\forall K \in \Phi_h,\ v_{|K} \in P_K$ et $v_{|\Gamma} = 0$.
   Pour connaître sa dimension, on compte uniquement les nœuds intérieurs (sommets des prismes) car on cherche des solutions nulles sur la frontière : il y en a 6. Donc $\dim E_h = 6$.

4. Dans la figure, on représente le plan $x = 1$ avec les arêtes des prismes et la numérotation des nœuds. La matrice est symétrique et de la forme $A = \begin{bmatrix} X & X & 0 & X & X & 0 \\ & X & X & 0 & X & X \\ & & X & 0 & 0 & X \\ & & & X & X & 0 \\ & & & & X & X \\ & & & & & X \end{bmatrix}$.



5. $A_{11} = \int_\Omega \left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right) dx\, dy\, dz.$
Il faut alors déterminer la forme de φ_1 dans chacun des prismes auquel le point 1 appartient, calculer les dérivées partielles, puis intégrer la somme dans chacun des primes. On obtient $\frac{16}{3}$.

Exercice 3 *Variante de l'algorithme d'acceptation-rejet*

1. méthode de la fonction de répartition inverse : u tirage uniforme sur $[0, 1]$ et $z = H^{-1}(u) = -\log(1 - u)$ (ou $z = -\log u$).
2. On a $G(y) = y^a$ donc méthode de la fonction de répartition inverse : u tirage uniforme sur $[0, 1]$ et $y = G^{-1}(u) = u^{1/a}$.
3. Il faut qu'il existe M tel que $f \leq Mg$. Comme $e^{-x} \leq 1$, on a ici $f \leq cg$. On peut appliquer l'algorithme d'acceptation-rejet avec $M = c$ et la probabilité d'acceptation sera $\frac{1}{c}$.
4. Algorithme de Vaduva
   (a) $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ (f est une densité) donc $c = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} g(x)(1-H(x))dx}$.
   $0 \leq H(x) \leq 1$ donc $0 \leq g(x)(1 - H(x)) \leq g(x)$. On passe aux intégrales et comme g est une densité, on a $\int_{\mathbb{R}} g(x)(1 - H(x))dx \leq 1$. CQFD
   (b) Attention : avant le (iii), on ne sait pas que X est de densité f !
      i. $P(Y < x \text{ et } Y < Z) = \int_{y \leq x, y \leq z} f_{YZ}(y, z)dy\, dz.$
      Y et Z sont indépendants donc $f_{YZ}(y, z) = g(y)h(z)$.
      Donc $P(Y < x \text{ et } Y < Z) = \int_{y=-\infty}^{x} g(y) \int_{z=y}^{+\infty} h(z)dz\, dy = \int_{-\infty}^{x} g(y)(1 - H(y))dy$
      $P(Y < Z)$ est la limite en $+\infty$ de la proba précédente :
      $P(Y < Z) = \int_{\mathbb{R}} g(y)(1 - H(y))dy = 1/c.$
      ii. $P(X < x \cap T = k) = P(Y_1 \geq Z_1, \ldots, Y_{k-1} \geq Z_{k-1}, Y_k < Z_k, Y_k < x)$.
      Les couples (Y_i, Z_i) sont indépendants entre eux d'où $P(X < x \cap T = k) = \prod_{i=1}^{k-1} P(Y_i \geq Z_i)P(Y_k < x \text{ et } Y_k < Z_k)$.
      iii. $P(X < x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X < x \cap T = k)$.
      Or $P(X < x \cap T = k) = (1 - \frac{1}{c})^{k-1} \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \frac{1}{c})^{k-1} = c$ (car $c \geq 1$).
      D'où $P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ et X admet bien f pour densité.

(c) La probabilité d'acceptation est $P(Y < Z)$, soit $1/c$.

5. Les deux algorithmes sont similaires du point de vue de leur probabilité d'acceptation. On choisira donc l'algorithme d'acceptation rejet si g simulable et H explicite car il faut que $f(x)/(cg(x)) = 1 - H(x)$ soit calculable (h n'a pas besoin d'être simulable), et on choisira l'algorithme de Vaduva pour g simulable et h simulable (H n'a pas besoin d'être explicite).
6. On reconnaît que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = cg(x)(1 - \int_{-\infty}^{x} h(u)du)$ en ayant posé $g(x) = \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq 1\}} a x^{a-1}$ et $h(x) = \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \exp(-x)$, densité de la loi exponentielle de paramètre 1. D'après les questions 1 et 2, l'algorithme de Vaduva s'écrit alors :
   i) Simuler U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. Poser $Y = U^{1/a}$ et $Z = -\log(V)$.
   ii) Si $Y < Z$ alors poser $X = Y$. Sinon, retourner en i.

MAT 3502 2° session

INT	Ingénieur 1°année	Août 2008

M. BECKER – B. MORANDO

Analyse des données

(calculettes et tout document autre que le polycopié de cours sont interdits)

	X	Y	Z
A	1	0	0
B	0	1	0
C	0	0	1
D	1	1	0
E	1	0	1
F	0	1	1

On considère le tableau de données logiques ci-contre :

Selon qu'un individu (A ou B ou C …etc…) est concerné par une variable (X ou Y ou Z) , on note 1 ou 0 dans la case correspondante.

Première partie : Analyse factorielle des correspondances :

1° - Former la matrice à diagonaliser pour effectuer l'A.F.C. de ce tableau et calculer ses valeurs propres.

2° - Calculer les vecteurs propres correspondant aux deux axes factoriels.

3° - Calculer les coordonnées dans ces axes des individus et des variables.

4° - Dessiner le graphique de cette A.F.C.- Commentaire.

Deuxième partie : Analyse en composantes principales :

1° - Dresser le tableau des variables centrées réduites ; en déduire la matrice à diagonaliser.

2° - Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres correspondant aux deux premiers axes.

3° - Calculer les coordonnées dans ces axes des individus et des variables.

4° - Dessiner le graphique de cette A.C.P.- Commentaire (différence avec l'A.F.C.)

I: AFC du tableau :

	X	Y	Z	
A	1	0	0	1
B	0	1	0	1
C	0	0	1	1
E	1	1	0	2
F	1	0	1	2
G	0	1	1	2
	3	3	3	

1) Matrice à diagonaliser :

On forme d'abord :

$$S = \left\{ k_{ij} / \sqrt{k_{i.} k_{.j}} \;/\; i, j \right\}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

puis

$${}^tSS = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

ou encore :

$${}^tSS = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

, le calcul des valeurs propres ici les solutions de $\det({}^tSS - \lambda Id) =$ revient à calculer, ayant posé $4 - 6\lambda = X$, les racines d

$$\begin{vmatrix} X & 1 & 1 \\ 1 & X & 1 \\ 1 & 1 & X \end{vmatrix} = 0$$

ie : $X = -2$ et $X = 1$ val. double :

$\Rightarrow \lambda = 1$ val propre triviale

et $\lambda = 1/2$ val propre double.

2) Vecteurs propres:

On doit résoudre: ${}^tSS\,u = \lambda u$

et donc: $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{3}{6}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

Il y a un plan propre ce qui est logique:
Il suffit de choisir deux vecteurs unitaires orthogonaux de la forme coïncidant satisfaisant $x+y+z=0$

par exemple: ${}^1u \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{vmatrix}$ ${}^2u \begin{vmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -\sqrt{2}/3 \end{vmatrix}$

3) Coordonnées de i et de j:

On forme la matrice T (de coeff: ${}^\alpha u_j / \sqrt{\rho_j}$) ici $\sqrt{\rho_j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall j$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{3} \\ -1 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On a donc les coordonnées des individus et des variables en calculant:

$$F = f_j^I \cdot T \quad \text{et} \quad G = T\,\Lambda^{1/2}$$

$\Rightarrow$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{3} \\ -1 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{3} \\ -1 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/2 & -1/2\sqrt{3} \\ -1/2 & -1/2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } G = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{3} \\ -1 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Pour le graphique :

$1/\sqrt{3} = 0{,}577$, $2/\sqrt{3} = 1{,}154\ldots$, $\frac{1}{2\sqrt{3}} = 0{,}288$

$1/\sqrt{2} = 0{,}707$, $1/\sqrt{6} = 0{,}408\ldots$, $\frac{2}{\sqrt{6}} = 0{,}816$

4) Graphique :

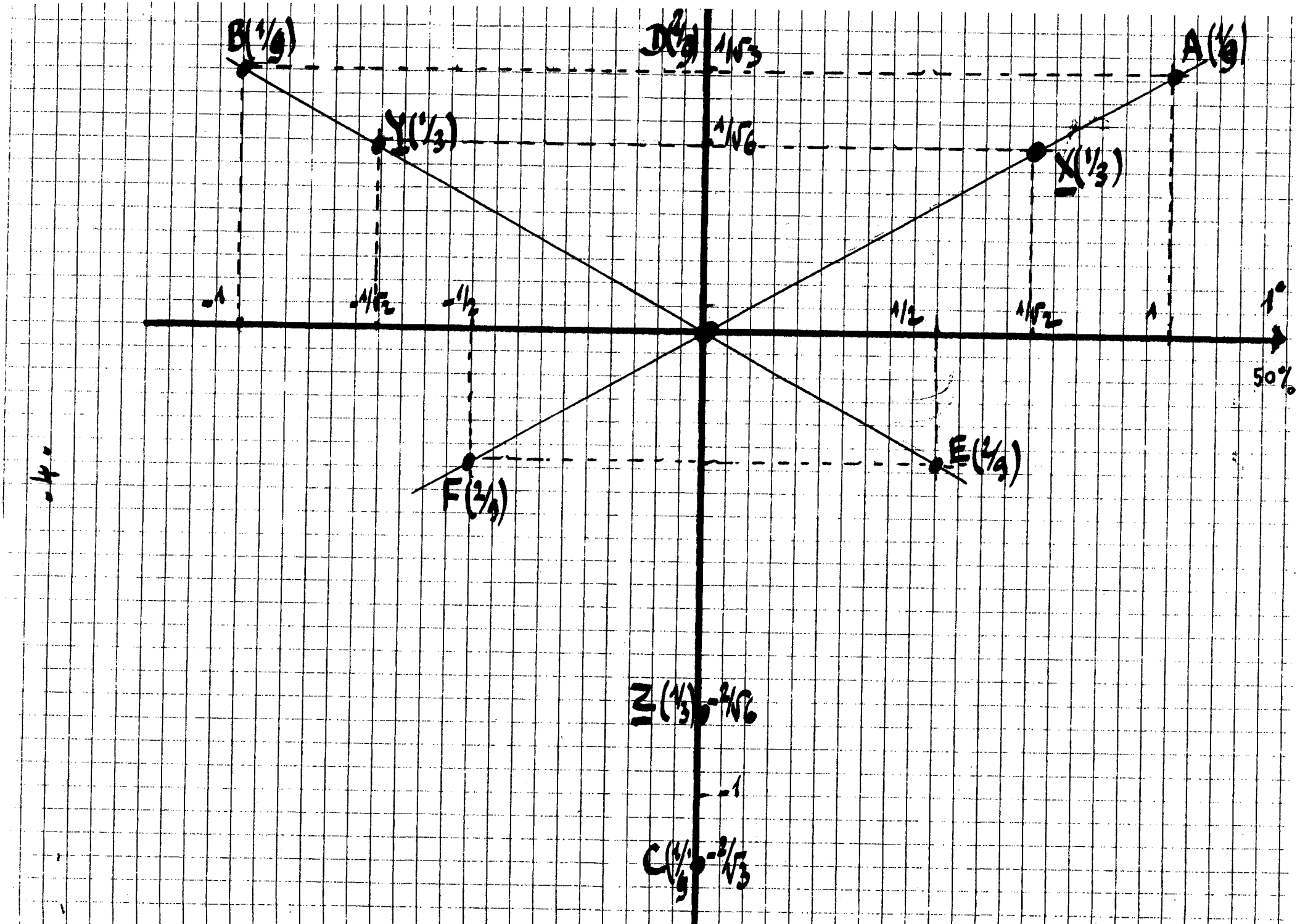
(voir page suivante)

Commentaire : Vérifier que les résultats sont cohérents i.e. la position de individus par rapport aux variables et inversement.

De plus, on a fait figurer les poids relatifs entre parenthèses et on retrouve bien les équilibres par rapport au centre de gravité.

Enfin la symétrie des nuages de A, B, C d'une part, de DEF d'autre part, leurs antisymétries d'autre part se traduisent par :

ABC, DEF, XYZ sont trois triangles équilatéraux. (et DEF s'obtient à CBA) cf tableau.


B(1/3)
D(2/3)
A(1/3)
Y(1/3)
X(1/3)
1/√3
1/√6
-1
-1/√2
-1/2
1/2
1/√2
1
1°
50%
F(2/3)
E(2/3)
Z(1/3)
-2/√6
-1
C(1/3)
-2/√3

II A.C.P. du tableau précédent :

On forme le tableau X des variables centrées réduites.
ici : $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 1/2$ et $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 1/2$

On a donc immédiatement :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Matrice à diagonaliser :

et donc :

$${}^tXX = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

2) Valeurs propres, vecteurs propres :

Posant $6 - \lambda = X$ on résout : $\begin{vmatrix} X & -2 & -2 \\ -2 & X & -2 \\ -2 & -2 & X \end{vmatrix} = 0$

$X = -2$ rend les trois colonnes identiques $X = -2$ est donc racine double
$\Rightarrow \lambda = 8$ val propre double $(\lambda_1 = \lambda_2 = 8)$

La somme des valeurs propres (trace de la matrice) valant 18, la troisième valeur propre vaut 2.

Le rang d'inertie pour la matrice ayant chuté faible, on se contente de λ_1 et λ_2 ; on aura donc aussi ici un plan principal pour :

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow 3 \text{ fois l'équation : } x + y + z = 0$$

Là encore, on peut prendre par exemple :

$$^1u \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{vmatrix} \qquad ^2u \begin{vmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \text{ ou } -\sqrt{2/3} \end{vmatrix}$$

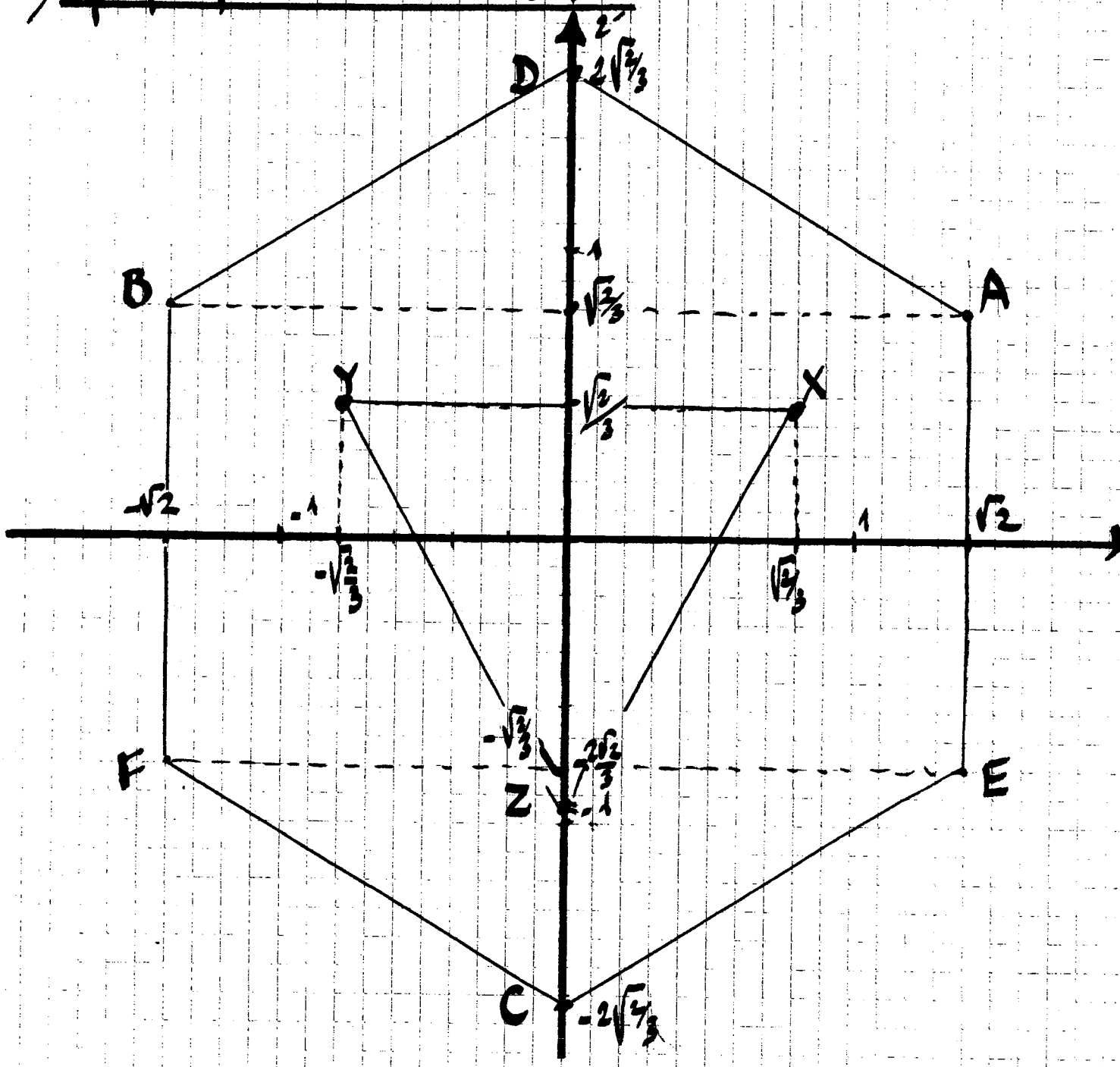
3/ Coordonnées des points dans le premier plan de l'ACP.

Elles sont données par $F_{ik}(i) = \sum \{ x_{ij} \, {}^k u_j / j \in J \}$
et $G_{ik}(j) = \sqrt{\frac{\lambda_k}{n}} \, {}^k u_j$, ce qui donne : pr les deux premiers axes

$$F = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2/\sqrt{6} \\ -\sqrt{2} & 2/\sqrt{6} \\ 0 & -4/\sqrt{6} \\ 0 & 4/\sqrt{6} \\ \sqrt{2} & -2/\sqrt{6} \\ -\sqrt{2} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

$\sqrt{2} = 1,414$; $2/\sqrt{6} = 0,816$ ou $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $4/\sqrt{6} = 1,633$ ou $2\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\frac{\sqrt{2}}{3} = 0,471$; $\frac{2\sqrt{2}}{3} = 0,942$

4) Graphique et commentaire :



Mêmes remarques sur la cohérence des résultats que pour l'A.F.C. en remarquant de plus que les poids des lignes étant cette fois identiques, AECFBD forment un hexagone régulier. et toujours X42 un triangle équilatéral

Contrôle écrit première session d'Analyse des données (AD12)
Le 14 juin 2007
Monique BECKER et Bertrand MORANDO
(aucun document autre que le poly de cours non annoté n'est autorisé
Les calculettes et téléphones portables sont interdits)

Soit le tableau de données ci-dessous :

	X	Y	Z	T	U	V
A	2	2	2	2	0	0
B	4	1	0	2	1	0
C	0	0	1	2	2	3

Première partie : Analyse factorielle des correspondances :

1) En vue de faire l'analyse factorielle des correspondances des données ci-dessus, calculer la matrice à diagonaliser.
2) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la sus-dite.
3) Calculer les coordonnées des représentants des lignes et des colonnes.
4) Faire le graphique (lignes et colonnes) du plan factoriel. (en grand format pour la suite) ;
5) Donner les tableaux des contributions relatives des lignes et des colonnes.

Deuxième partie : Classification ascendante hiérarchique :

1) On désire faire la classification des colonnes du tableau suite à cette A.F.C. Pour cela, calculer les distances des points deux à deux, puis les indices de niveau associés.
2) En déduire les premiers éléments à agréger, puis continuer l'algorithme .
3) Dessiner le dendrogramme correspondant.
4) Reporter cette classification sur le graphique du plan factoriel de la première partie.
5) Dessiner sans calcul le dendrogramme de la classification des lignes ; remarques .

INT Ana Don. Juin 2007

Premiere partie : AFC

	X	Y	Z	T	U	V	$k_{i\cdot}$
A	2	2	2	2	0	0	8
B	4	1	0	2	1	0	8
C	0	0	1	2	2	3	8
$k_{\cdot j}$	6	3	3	6	3	3	24

1) On forme la matrice $S = \left\{ s_{ij} = k_{ij} / \sqrt{k_{i\cdot} k_{\cdot j}} \right\}$ puis on diagonalise ${}^tSS$.

Ici, à l'évidence, on a intérêt à raisonner sur $S{}^tS$ et à faire les calculs en commençant par les j de $\mathbb{R}^I$

$$S = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 2 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S{}^tS = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 8 & 12 & 4 \\ 4 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

ou encore $\boxed{\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$

2) on doit de diagonaliser $S{}^tS$ c.à.d trouver les solutions de $\det(S{}^tS - \lambda I) = 0$

ou encore posant $3 - 6\lambda = X$, on résout

$$\begin{vmatrix} X & 2 & 1 \\ 2 & X & 1 \\ 1 & 1 & X+1 \end{vmatrix} = 0$$

$X = 2$ est solution évidente $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$

on doit avoir $\lambda_0 = 1$ valeur propre et la somme des vleurs propres valant $\frac{10}{6}$; on a $1 + \frac{1}{6} + \lambda = \frac{10}{6}$

Le 3e vleur prope vaut donc $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

En résumant : on a : $\lambda_0 = 1$ v.p triviale

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{1}{2}, \ \lambda_2 = \frac{1}{6}}$$

vecteurs propres $\hat{w}$

Pour $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ il vient $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 3x \\ 2x + 3y + z &= 3y \\ x + y + 4z &= 3z \end{aligned}$$

d'où, en normant à 1 : $\hat{w}$ pour $\lambda_1 = 1/2$: $\begin{vmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{vmatrix}$

Pour $\lambda_2 = \frac{1}{6}$ il vient $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 3x + 2y + z &= x \\ 2x + 3y + z &= y \\ x + y + 4z &= z \end{aligned}$$

d'où, en normant à 1 : $\hat{w}_2$ pour $\lambda_2 = \frac{1}{6}$: $\begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{vmatrix}$

3) Coordonnées des colonnes : on forme la matrice T' à partir des $\hat{w}, \hat{w}_2$ en multipliant par : $\frac{1}{\sqrt{\ }}$ ici : $\times\sqrt{3}$

et on permultiplie T' par : $\begin{matrix} P \\ I \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

on a donc :

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 2/\sqrt{6} \\ 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}$$

Coordonnées des 1-2 de : X, Y, Z, T, U, V

Et l'on a directement les coordonnées de i

par: $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} T' = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$

Coordonnées de 1.2 de C	A	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
	B	
	C	

4) Graphique: voir feuille jointe:

5) Contributions $CTR_\alpha(i) = \frac{f_{i.} F_\alpha^2(i)}{\lambda_\alpha}$; $CTR_\alpha(j) = \frac{f_{.j} G_\alpha^2(j)}{\lambda_\alpha}$

D'où les tableaux de contribution:

	Axe 1	Axe 2
A	1/6	1/2
B	1/6	1/2
C	2/3	0

	Axe 1	Axe 2
X	1/4	1/4
Y	1/8	1/8
Z	0	1/2
T	0	0
U	1/8	1/8
V	1/4	0

Deuxième partie: C.A.H:

d^2	X	Y	Z	T	U	V
X	0	2/3	2	2/3	2	14/3
Y		0	2/3	2/3	8/3	14/3
Z			0	2/3	2	8/3
T				0	2/3	2
U					0	2/3
V						0

δ	X	Y	Z	T	U	V
X	0	1/18	1/6	1/12	1/6	7/18
Y		0	1/24	1/18	1/6	7/24
Z			0	1/18	1/8	1/6
T				0	1/18	1/6
U					0	(1/24)
V						0

On agrège par les U et V (on aurait pu s'embêter à agréger 42 d'abord) dont le barycentre sera le noeud n_7

d^2	X	Y	Z	T	n_7 (6)
X	0	2/3	2	2/3	19/6
Y		0	2/3	2/3	21/6 (7/2)
Z			0	2/3	13/6
T				0	7/6
n_7					0

δ	X	Y	Z	T	n_7 (6)
X	0	1/18	1/6	1/12	19/48
Y		0	(1/24)	1/18	7/24
Z			0	1/18	13/48
T				0	7/48
n_7					0

On agrège 42 → n_8 avec niveau de noeud 1/24 comme le précédent ce qui est logique, puisqu'on aurait pu commencer par là.

d^2	X	n_8	T	n_7
X	0	7/6	2/3	19/6
n_8	"	0	1/2	8/3
T	"	"	0	7/6
n_7	"	"	"	0

δ	X	n_8	T	n_7
X	0	7/48	1/12	19/48
n_8	"	0	(1/16)	1/3
T	"	"	0	7/48
n_7	"	"	"	0

On agrège n_8 et T $\rightsquigarrow$ on fait le nuage n_9 (barycentre de n_8, T)

d^2	X	n_9	n_7
X	0	19/24	19/6
n_9	"	0	43/24
n_7	"	"	0

δ	X	n_9	n_7
X	0	(19/144)	19/48
n_9	"	0	43/144
n_7	"	"	0

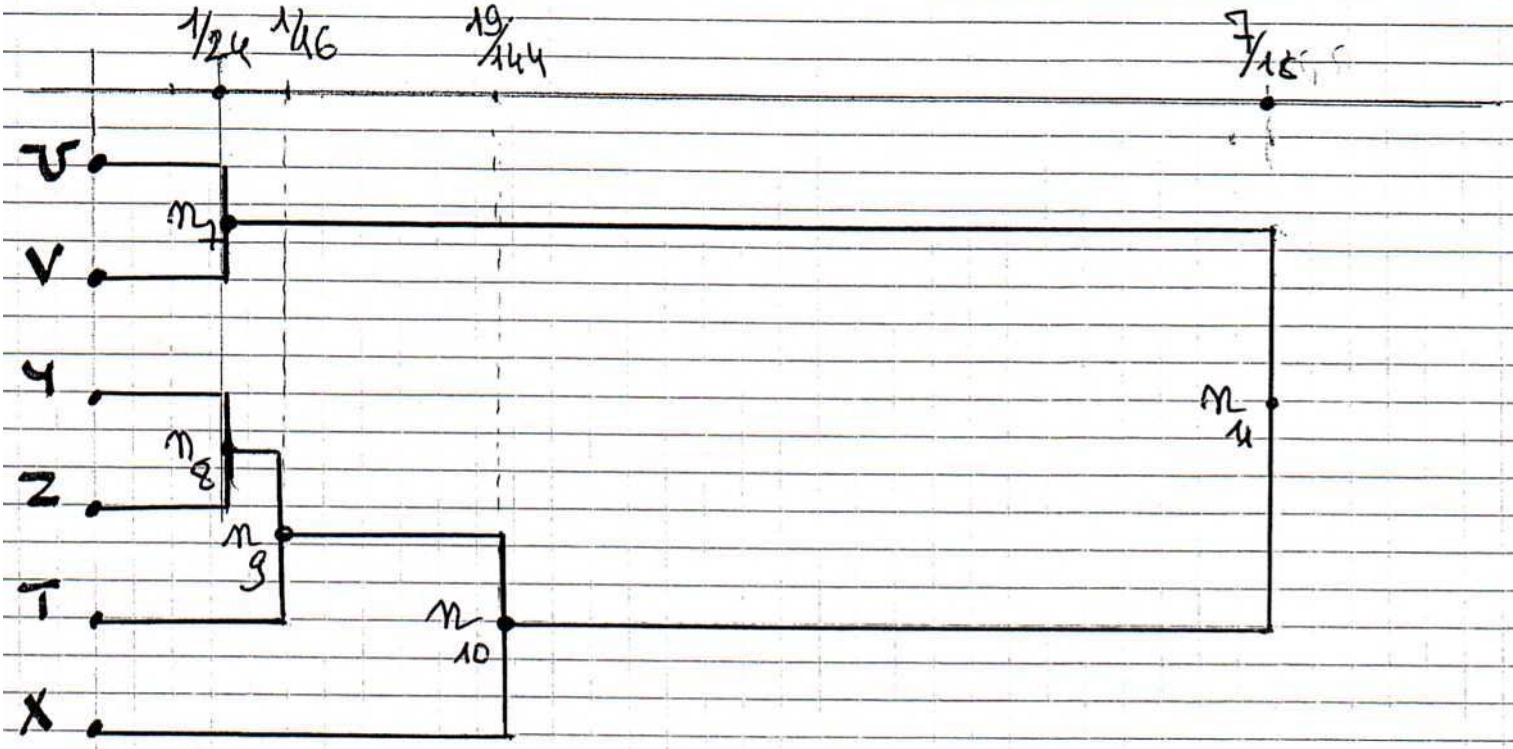
On agrège X et n_9 $\rightsquigarrow$ n_{10} (barycentre de X et n_9)

d^2	n_{10}	n_7
n_{10}	0	56/27
n_7	"	0

δ	n_{10}	n_7
n_{10}	0	(7/18)
n_7	"	0

On agrège enfin n_{10}, n_7 $\rightsquigarrow$ n_{11} (barycentre de n_{10}, n_7)
C'est le barycentre du nuage.

En respectant les niveaux des nœuds, on a donc le dendrogramme ci-dessous.

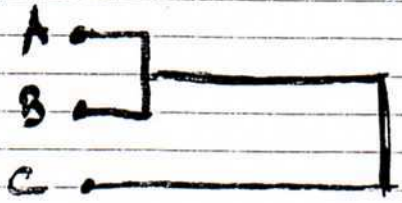


On vérifie au passage que la somme des niveaux de nœuds :

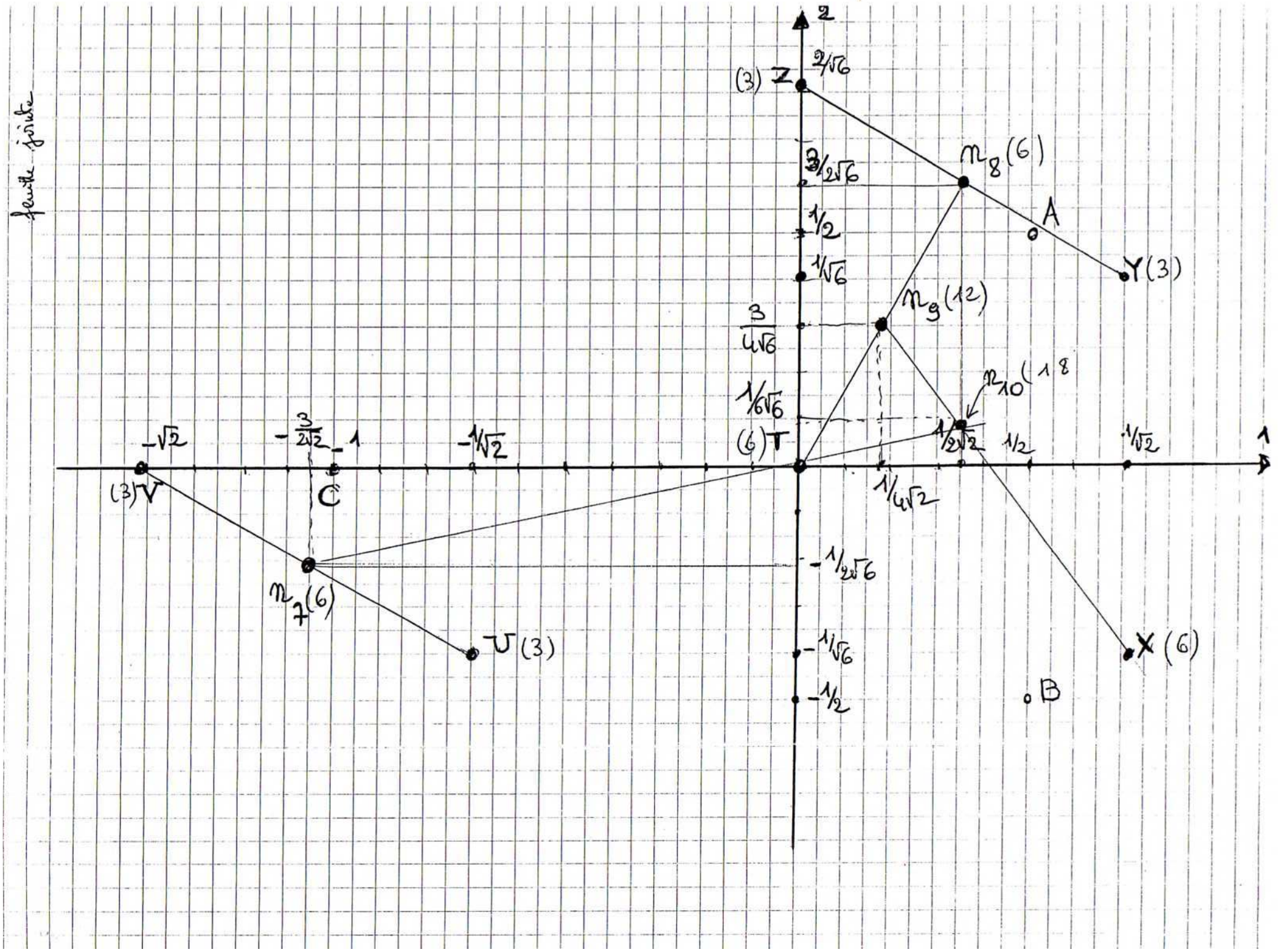
$$v(n_7)+v(n_8)+v(n_9)+v(n_{10})+v(n_{11})$$
$$= \frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{16}+\frac{19}{144}+\frac{7}{18}=\frac{2}{3}$$ c'est à dire

l'inertie du nuage, c'est à dire $d_1+d_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$

Pour les lignes le dendrogramme



C correspond à (V,V) (AB) sera associé à l'ensemble X42T


feuille finale
z
2/√6
(3) Z
3/2√6
n8(6)
A
1/2
1/√6
Y(3)
n9(12)
3/4√6
1/6√6
n10(18
(6) T
-√2
-3/2√2
-1
-1/√2
1/2√2
1/2
1/√2
1
(3) V
C
1/4√2
-1/2√6
n7(6)
U(3)
-1/√6
X(6)
-1/2
B

Analyse des données 2ème session 30 août 2007

Aucun document autre qu'un polycopié de cours n'est autorisé, aucune calculette, aucun téléphone.

QUESTION DE COURS :

Expliquer le principe de base de la méthode des classifications
Pourquoi définit-on un indice de niveau ?
Cette méthode apporte t'elle des informations supplémentaires par rapport à l'A.F.C. ou l'A.C.P. ?

PROBLEME :

Soit le tableau de données ci-contre :

	X	Y	Z
A	0	0	3
B	0	1	2
C	1	1	1
D	1	1	1
E	2	0	1
F	2	1	0
G	1	2	0
H	1	2	0

Première partie : Analyse en Composantes Principales :

1) Exhiber le tableau des données centrées réduites (remarque : étant en ACP, on ne rassemblera pas les individus ayant même ligne de données)
2) En déduire la matrice à diagonaliser.
3) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de cette dernière.
4) En déduire les coordonnées des représentants des lignes et des colonnes.
5) Dessiner sur un même graphique les individus et les variables de l'unique plan factoriel (une des trois valeurs propres étant nulle).

Deuxième partie : Classification Ascendante Hiérarchique :

1) En vue de faire la CAH des lignes de ce tableau, on dressera le tableau des distances au carré entre individus (nous sommes en ACP, on prend donc la distance euclidienne) ; remarquons que l'on peut trouver aisément ces distances à partir du graphique de la première partie et agréger dès le début C&D, d'une part et G&H d'autre part.
2) En déduire le tableau des indices de niveau, les individus ayant tous le même poids, par exemple 1 (et donc 2 pour C&D et pour G&H)
3) En déduire les premiers éléments à agréger, puis continuer l'algorithme.
4) Dessiner le dendrogramme correspondant en tenant compte des indices de niveau.
5) Reporter cette classification sur le graphique du plan factoriel de la première partie.
6) Cette classification est-elle bien en cohérence avec l'ACP précédente ?

INT: AD. Août 2007

	X	Y	Z	
A	0	0	3	3
B	0	1	2	3
C	1	1	1	3
D	1	1	1	3
E	2	0	1	3
F	2	1	0	3
G	1	2	0	3
H	1	2	0	3
	8	8	8	

Première partie: A.C.P.

1) Données centrées réduites:

On a $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 1$

$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \frac{1}{2}$, $\sigma_Z^2 = 1$

La matrice $X = \left\{ x_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_j} \right\}$

s'écrit donc:

$$X = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

et donc:

2) Matrice à diagonaliser:

$$^tXX = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4\sqrt{2} \\ 0 & 8 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$$

3) Les valeurs propres et données par:

$\det(^tXX - \lambda I) = 0$

π: $^tXX - \lambda I$ peut s'écrire $+4\sqrt{2} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -1 \\ 0 & \gamma & -1 \\ -1 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$

avec: $\gamma = \sqrt{2} - \frac{\lambda}{4\sqrt{2}}$

ou. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4^3 - 24 = 0 \Rightarrow 4 = 0, 4 = \pm\sqrt{2}$

On a donc: puisque $\Delta = 4\sqrt{2}(\sqrt{2} - 4)$

$\delta_1 = 16$, $\delta_2 = 8$, $\delta_3 = 0$

(l'A.C.P. sera réduite ici à un plan puique $\delta_3 = 0$

Résolvant ${}^t X X u = \delta u$:

On en déduit: à $\delta_1 = 16$ $\rightsquigarrow$ ${}^1u \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \end{vmatrix}$

à $\delta_2 = 8$ $\rightsquigarrow$ ${}^2u \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{vmatrix}$

4) <u>Les coordonnés des individus</u> (ou représentants des lignes) sont donnés par:

$$F_\alpha(i) = \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \, {}^\alpha u_j$$

Matriciellement, on obtiendra les coordonnés de l'ensemble des points en faisant le produit:

$$F = XU \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ ou encore } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

en mettant $\sqrt{2}$ en facteur de X : on peut encore écrire

~ 3 x

$$F = X.U = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{axe 1} & \text{axe 2} \\ \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix}$$

et $G_{ij} = \sqrt{\frac{d_j}{n}}\, u_{ij}$ c.à.d. matriciellement :

puisque $d_1 = 16$, $d_2 = 8$, $n = 8$

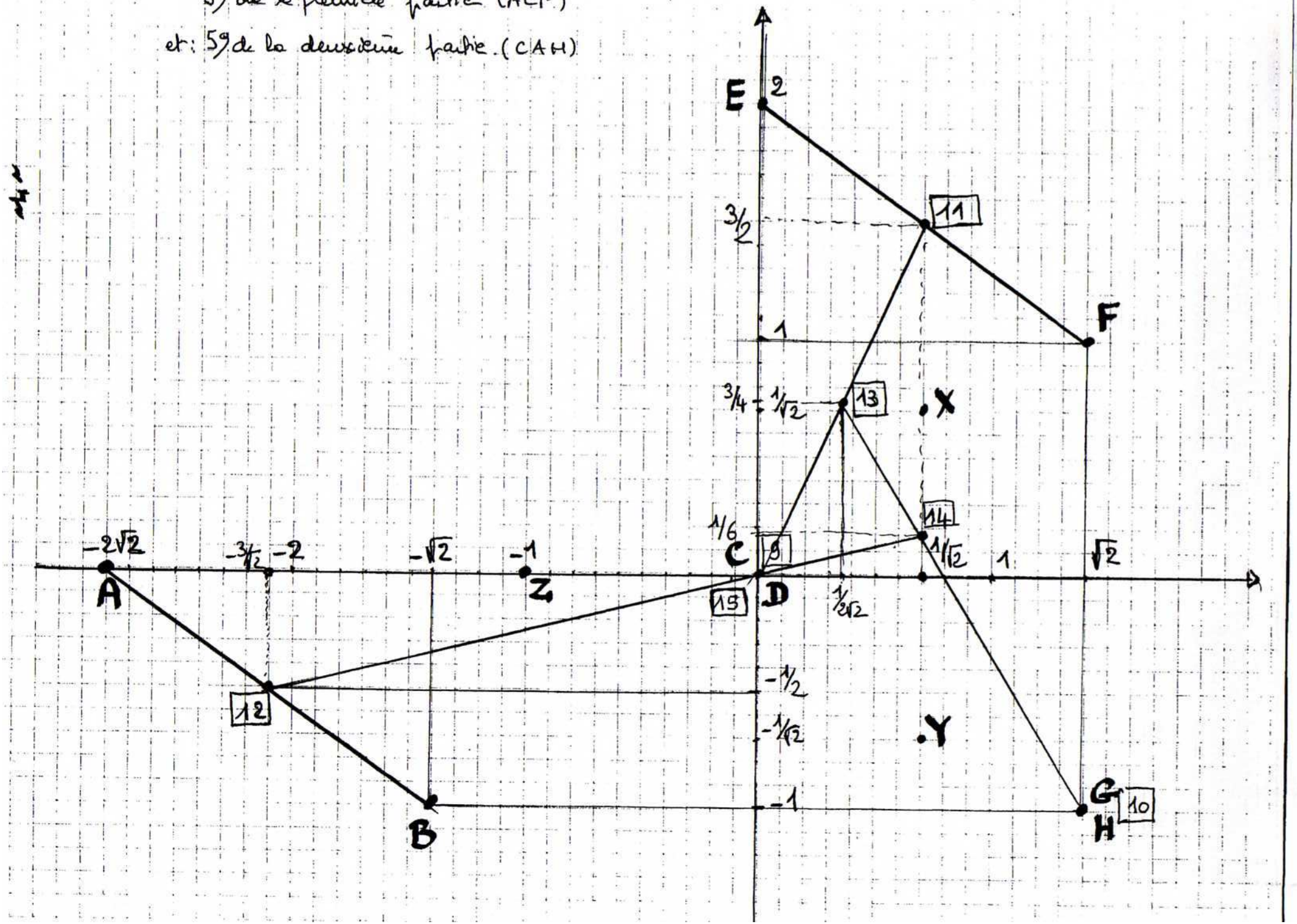
$$G = U \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \underline{\text{coordonnées des variables}}$$

axe 1 axe 2

On retrouve bien que X, Y et Z sont sur une sphère unité (ici réduite au cercle bien sûr).

5) de la première partie (ACP)

et: 5) de la deuxième partie. (CAH)



Deuxième partie: C.A.H:

1) Distances entre individus. (ayant regroupé C,D et G H qui peuvent être considérés ici comme un individu de poids 2 chacun).

d^2	A	B	CD	E	F	GH
A	0	3	8	12	19	19
B		0	3	11	12	8
CD			0	4	3	3
E				0	3	11
F					0	4
GH						0

L'indice de distance est donné par:

$$\delta(i,i') = \frac{m_i m_{i'}}{m_i + m_{i'}} d^2(i,i')$$

ici l'on a tous commencé:

$$m_A = m_B = m_E = m_F = 1$$

$$m_{CD} = m_{GH} = 2 \quad \text{et donc le}$$

premier tableau d'indice de distance :

2)

δ	A	B	9 (CD)	E	F	10 (GH)
A	0	3/2	16/3	6	19/2	38/3
B		0	2	11/2	6	16/3
CD			0	8/3	2	3
E				0	3/2	22/3
F					0	8/3
GH						0

3)

On peut considérer que le noeud 9 était CD, le noeud 10 était GH avec $\nu(9) = \nu(10) = 0$ on notera donc 11 le noeud obtenu en agrégeant E et F (on aurait pu commencer par : A et B) avec $\nu(11) = 3/2$.

4) On a donc les tableaux suivants permettant de continuer l'algorithme :

d^2	A	B	9 (CD)	11 (EF)	10 (GH)
A	0	3	8	59/4	19
B		0	3	43/4	8
9 (CD)			0	11/4	3
11 (EF)				0	27/4
10 (GH)					0

EF ou 11 a pour coordonnée $(1/\sqrt{2}, 3/2)$

δ	A	B	9 (CD)	11 (EF)	10 (GH)
A	0	3/2	16/3	59/6	38/3
B		0	2	43/6	16/3
9 (CD)			0	11/4	3
11 (EF)				0	11/4
10 (GH)					0

⇐ On agrège donc A, B comme le laissait prévoir 3).

Le noeud 12 est donc l'agrégation de A et B avec $\nu(12) = 3/2$. Il vient donc : les coordonnées du noeud 12 étant $(-3/\sqrt{2}, -1/2)$.

(δ) d^2	12 (AB)	9 (CD)	11 (EF)	10 (GH)
12 (AB)	0	19/4	12	51/4
9 (CD)		0	(11/4)	3
11 (EF)			0	27/4
10 (GH)				0

Remarque : tous les poids ici sont égaux à 2 et donc : $\frac{m_i m_{i'}}{m_i + m_{i'}} = 1$: le tableau de δ est identique à celui de d^2

Le noeud 13 sera donc l'agrégation de 9 et 11 avec $\nu(13) = 11/4$ coordonnées $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\right)$

On a donc le tableau suivant :

d^2	12	13	10
12 (AB)	0	123/16	51/4
13 (9,11)		0	67/16
10 (GH)			0

et donc le tableau des indices :

δ	12	13	10
12	0	41/4	51/4
13		0	(67/12)
10			0

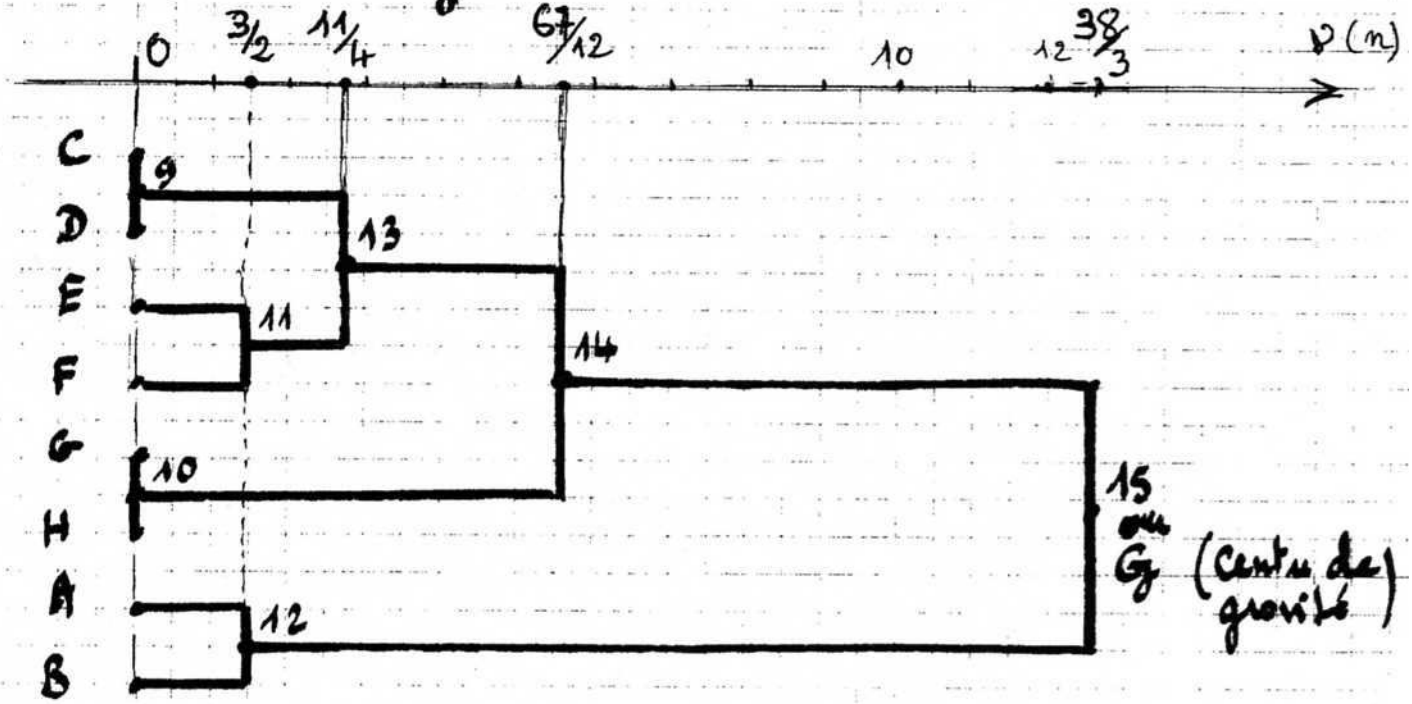
Le noeud 14 suivant sera donc l'agrégation de 13 et 10 ; compte-tenu des poids respectifs, il aura pour coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{6}\right)$ et $\nu(14) = \frac{67}{12}$

Il reste à agréger 12 et 14 ; on remarque que le barycentre est bien à l'origine.

De plus $d^2(12,14) = \frac{76}{9}$ et compte-tenu des poids respectifs 2 et 6 on a $\delta = \frac{2.6}{2+6} \cdot \frac{76}{9} = \frac{38}{3}$

On a donc : $P(15) = \frac{38}{3}$.

4) D'où le dendrogramme :



On vérifie, au passage, que la somme des niveaux des nœuds est égale à la somme des valeurs propres c.à.d. à l'inertie totale.

En effet $0 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{11}{4} + \frac{67}{12} + \frac{38}{3} = \frac{288}{12} = 24$

et $d_1 + d_2 = 16 + 8 = 24$ c.q.f.d.

6) La cohérence avec l'A.C.P. selon que les individus sont concernés par x, y ou z apparaît bien.

UV Gestion, droit,economie

Gf - DR

Caliente

Le 2/4/08

CONTRÔLE FINAL ECONOMIE DE L'ENTREPRISE (DR12)

(sans document et sans calculette)

1. Comment l'Etat peut-il financer son déficit budgétaire sans recourir à l'impôt ? Quels sont les inconvénients de chaque méthode ?

2. Qu'est-ce que le tableau entrée-sortie (TES) de la comptabilité nationale française ? A quoi sert-il ?

3. Définissez l'élasticité-revenu de la demande d'un bien ? Comment peut-on interpréter les résultats des mesures obtenues ? Donnez des exemples.

4. Un monopole est caractérisé par la fonction de coût total suivante :

$$C_t = \frac{Q^2}{80} + 100$$

Où Q est la quantité produite par le monopole. Il fait face à la demande du marché, caractérisée par :

$$Q_D = -80p + 400$$

Où p est le prix unitaire du produit vendu par la firme.

a) Calculez, en fonction de Q les recettes totale, moyenne et marginale, ainsi que le coût marginal du monopole. Représentation graphique, à l'exception de la recette totale.

b) En déduire le prix et la quantité correspondant à l'équilibre du monopole, et calculez son profit.

c) Quelles seraient la quantité et le prix correspondant à l'équilibre de concurrence pure et parfaite ? Comparez avec le monopole. Commentaires ?

Le 7 avril 2006

CONTRÔLE ECONOMIE DE l'ENTREPRISE (DR12)

(1h, sans document et sans calculette)

Répondez avec précision aux questions suivantes :

1. Expliquez le mécanisme du multiplicateur keynésien en économie fermée. En quoi ce concept a-t-il représenté une avancée théorique importante pour la politique économique ?

2. Quelles sont l'intérêt et les limites les plus importantes de la comptabilité nationale française ?

3. Qu'est ce que l'élasticité-revenu de la demande d'un bien ? comment la mesure-t-on et comment peut-on interpréter le résultat obtenu ?

4. Comment peut-on établir l'optimum du consommateur disposant d'un budget donné ? Représentation graphique.

5. Qu'est-ce que le taux marginal de substitution entre deux biens ? Comment le mesure-t-on ?

6. L'équilibre keynésien IS-LM : explication des courbes et représentation graphique.

7. Qu'est-ce qu'une économie d'échelle ? D'où proviennent les économies d'échelle des entreprises ?

8. Expliquez brièvement la théorie des rendements décroissants des facteurs de productton.

Le 16 avril 2007

CONTROLE ECONOMIE DE L'ENTREPRISE (DR12)

(1h30, sans document ni calculette)

1. Qu'est-ce que l'élasticité croisée de la demande d'un bien ? Mode de calcul et interprétation des résultats obtenus. (2 pts)

2. Qu'est-ce qu'une externalité en économie ? Donnez des exemples d'externalité positive et négative. (2 pts)

3. Le multiplicateur keynésien en économie fermée : définition, mode de calcul et intérêt pour la politique économique. (3 pts)

4. Que sont les coefficients techniques du tableau entrée-sortie (TES) de la comptabilité nationale ? A quoi servent-ils, et, de façon plus générale, comment peut-on évaluer les effets d'un choc (augmentation brutale de la demande, par exemple) sur l'économie nationale ? (3 pts)

5. Exercice (10 pts)

   Une entreprise en situation de monopole a la fonction de coût total suivante :

   $C_t = 20 + 20Q$

   Elle a estimé la fonction de demande qui lui est adressée comme suit :

   $P = 100 - 2Q$

   Où P est le prix unitaire du bien et Q la quantité.

   1. Déterminez le prix de vente, les quantités vendues et le profit réalisé dans les trois cas de figure suivants :

      a. Le monopole maximise son profit.
      b. Le monopole maximise son chiffre d'affaire, c'est-à-dire sa recette totale.
      c. Le monopole pratique une tarification au coût marginal.

   2. Après avoir représenté graphiquement les différentes solutions possibles (l'ensemble sur un même graphique incluant le coût marginal ainsi que les recettes moyennes et marginale du monopole), vous tenterez de justifier l'utilisation de ces trois critères de gestion en fonction de leur pertinence économique et de leur efficacité pour le consommateur et le monopole, privé ou public.

LE QUOY Sébastien

16/04/07

CPI d'Economie.

DR12

19/20 Bravo

1) L'élasticité croisée d'un produit x en fonction du prix d'un produit Y correspond à la variation que subit la consommation de ce produit x lors d'une légère variation du prix de Y.

$$e_{x/P_y} = \frac{\partial x}{\partial P_y} \cdot \frac{P_y}{x}$$

02

Dès lors :

interprétation des résultats : $0 < e < 1$: biens de substitution
$e > 0$ = biens indépendants
$e < 0$ = biens complémentaires
$e < -1$ = biens très complémentaires 01

2) Externalité en économie :

C'est l'interaction entre deux ou plus plusieurs agents économiques qui n'est pas prise en compte par le marché. 01

externalité positive :

externalité négative :

3) multiplicateur keynésien.

On définit le multiplicateur keynésien k par :

$$k = \frac{Y}{I} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Y : \text{revenu} \\ I : \text{investissement.} \end{cases}$$

Dès lors, on a : 01

$$k = \frac{\Delta Y}{\Delta I}$$

Or $Y = I + C$ avec C la consommation

et $C = C_0 + cY$ avec $c \in [0,1]$: coefficient de consommation.
$C_0 = \overline{dc}$.

d'où $Y = I + C_0 + cY$

$\Delta Y = c\Delta Y + \Delta I \Rightarrow \Delta Y = \frac{1}{1-c} \Delta I$ 01

$k = \frac{1}{1-c} > 1$

Dès lors l'intérêt est évident car cela signifie que si on augmente l'investissement (notamment au niveau de l'état), les ~~revenus~~ revenus vont augmenter d'une façon encore plus importante grâce au fait que $k > 1$.

01

Cela justifie les politiques budjetaires de l'Etat. D'où l'importance du multiplicateur keynésien.

4) Ce tableau d'entrée-sortie (TES) se présente sous la forme d'une matrice.

Les premières lignes et colonnes sont de la forme :

	C1	C2	C3	...	Cf
	Agriculture	Industrie	Service		
Agriculture	α	β	γ	...	
Industrie	δ			...	
Service	ε			...	
...					
Lf					

02

Il se lit de la façon suivante :

En ligne : l'Agriculture utilise α ressources de l'Agriculture elle-même, β de l'industrie et γ des servi
l'Industrie utilise δ ressources de l'Agriculture, etc...

En colonne : l'Agriculture est utilisée à hauteur de α par l'Agriculture, δ par l'Industrie et ε par les Service

A terme, en ajoutant une ligne concernant la valeur ajoutée, ~~on obtient en Cf~~ et en faisant la somme des éléments d'une même colonne, on obtient pour chaque colonne la valeur de la production totale. (reportée en ligne finale Lf)

De même, on obtient en Cf la ressource humaine utilisée dans tous ces domaines.

Dès lors, pour avoir un équilibre, il faut que la colonne Cf contienne les mêmes valeurs que la ligne Lf

c'est à dire : l'élément (L_1, C_f) = l'élément (L_f, C_1)
——— (L_2, C_f) = ——— (L_f, C_2) 01

etc...

Ainsi, ce tableau concernant l'économie nationale, si on observe une augmentation de demande, on pourra envisager des plans afin de rétablir l'équilibre. On saura quel domaine a plus besoin d'un autre" et ainsi, il ne faudra rééquilibrer qu'une colonne.

cela permet de faire des prévisions sur le long terme.

5/ Exercice :

$Ct = 20 + 20Q$.

$P = 100 - 2Q$.

a/ On se place dans le cas où le monopôle maximise son profit :

On a :

$$\Pi = P \times Q - Ct$$

$$\Pi = 100Q - 2Q^2 + 20 - 20Q.$$

Cherche Q tq : $\frac{\partial \Pi}{\partial Q} = 0 \iff 100 - 4Q - 20 = 0$

$$\iff 4Q = 80$$

$$\iff Q = 20.$$

On a donc

$Q = 20$
$Ct = 420$
$P = 60.$
$\Pi = 780$

02

b/ Le monopôle maximise son chiffre d'affaire.

On a : $CA = P \times Q$

$$CA = 100Q - 2Q^2$$

$\frac{\partial CA}{\partial Q} = 0 \iff 100 - 4Q = 0$

$$\iff Q = 25.$$

Donc :

$Q = 25$
$Ct = 520$
$P = 50.$
$\Pi = 730.$

02

c/ Le monopôle pratique une tarification au coût marginal.

On a : $Cm = \frac{\partial Ct}{\partial Q}$ $\quad Cm$ = coût marginal.

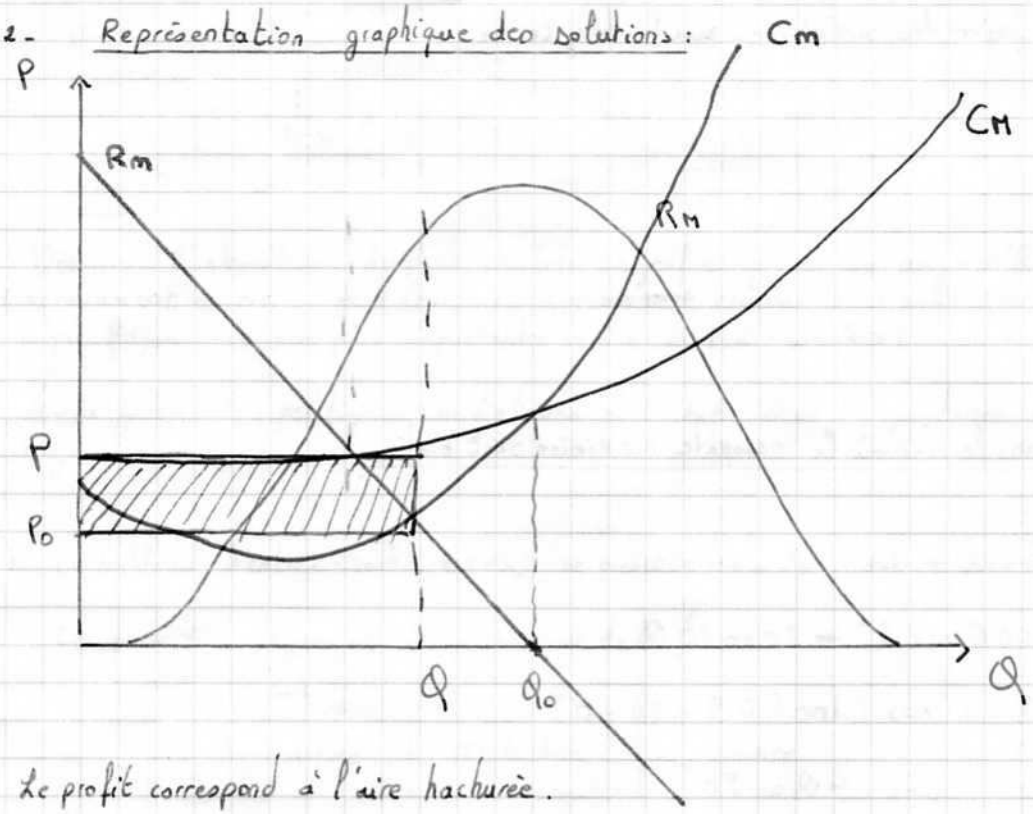
$$Cm = 20$$

d'où : $P = Cm = 20 \implies$

$Ct = 820$	$P = 20$
$Q = 40$	$\Pi = -20.$

02

2- Représentation graphique des solutions :



03

Le profit correspond à l'aire hachurée.

Or graphiquement, on voit bien que cette aire est d'autant plus grande que le prix est grand, tant que la demande Q reste inférieure à Q0.

D'où la justification des résultats

Bilan:

a) Pour le consommateur : avantage à une tarification au coût marginal car le prix est inférieur aux autres dans ce cas.

b) Pour le marché : pour le marché, l'intérêt est de maximiser Q d'où un avantage

CONTROLE FINAL GF11 INT 2007/2008
(1 h30, sans document ni calculette)

PREMIERE PARTIE (2 points par question)

1. Citez quatre différences essentielles existant entre une SA et une SARL.

2. Comment est en train d'évoluer la notion de produit d'un point de vue marketing ?

3. Quels sont les temps et domaines d'études à prendre en compte dans une réflexion stratégique au niveau de l'entreprise ?

4. Evoquez, au travers de deux exemples, les conflits de logique pouvant survenir entre un service de production et un service marketing.

5. Rentabilité sociale et rentabilité économique sont-elles contradictoires ?

SECONDE PARTIE (10 points)

1. A partir des données comptables fournies ci-après, établir le compte de résultats ainsi que le bilan, avant et après répartition du résultat, au 31.12.07 de la société NOA qui fabrique des téléphones cellulaires. (8 points)

2. Calculez la valeur ajoutée de la société ainsi que sa marge brute d'autofinancement. (2 points)

Toutes les valeurs sont exprimées en KEuros

Produits sur gains de change = 3
Stock final matières premières = 60 et Stock initial de matières premières = 20
Dettes financières à long terme = 25 et Dettes financières à court terme = 10
Créances clients = 200
Provision 2007 pour clients douteux = 5% des créances clients
Frais EDF-GDF = 85
Capital social = 400
Impôts et taxes = 140
Frais divers de gestion = 40
Achat d'équipements de fabrication (valeurs d'achat au 1.01.05) = 500
Ces matériels de fabrication s'amortissent linéairement sur 10 ans.
Frais de transport = 42
Salaires versés = 260 et Charges salariales = 50% des salaires
Dettes fournisseurs = 50
Production vendue = 1847
Frais de publicité = 83
Immobilisations incorporelles = 45
Loyers payés = 100
Réserves légales = 40 et Réserves facultatives = 60
Frais financier sur emprunt = 2
Disponibilités = 40
Achats de matières premières = 900
Produits exceptionnels sur la vente terrain agricole = 52
Impôt sur les sociétés = 30% du solde total (produits - charges)
Répartition du bénéfice après IS : 10% en réserves légales, 20% en réserves facultatives et 70% en dividendes

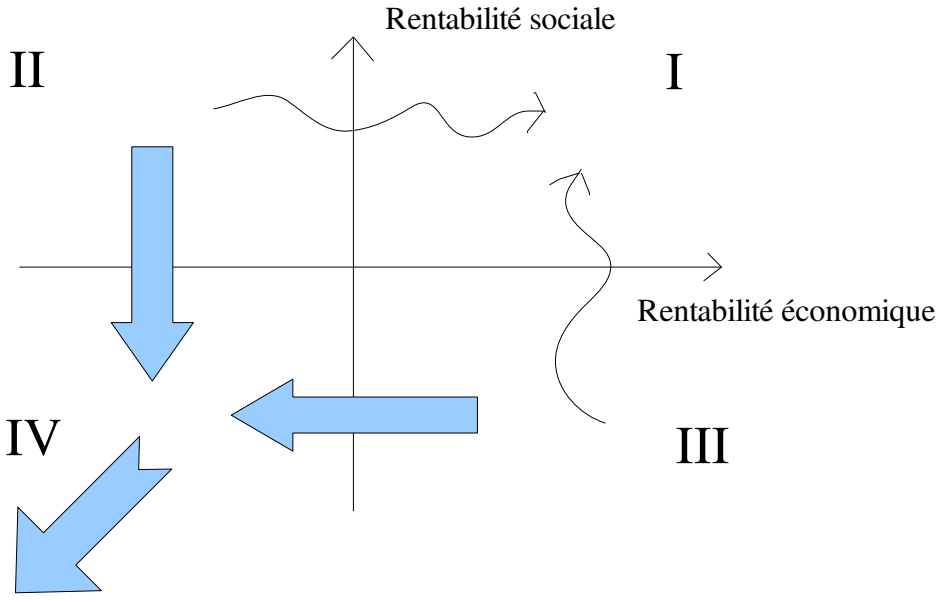
1- Une SA (Société Anonyme) doit posséder un capital de départ de 38000€, ainsi qu' un minimum de 7 personnes, La société est divisé en actions et peut donc être cotée à la bourse de Paris.
En revanche une SARL (Société A Risque Limité) ne doit pas posséder de capital de départ et le nombre de personne minimum est de 2. Elle est divisé en parts et ne peut donc pas être cotée en bourse.

2- D'un point de vue marketing, un produit comporte trois niveaux : le cœur du produit (sa forme, son utilité), la partie périphérique (le prix, le packaging, le point de vente) et la troisième partie qui correspond à ce qui est autour du produit (garantie, SAV...). Toujours d'un point de vue marketing, un produit se positionne dans une gamme, par rapport à d'autres produits de même type, selon la partie périphérique.

3- Dans une réflexion stratégique, trois domaines doivent être pris en compte : l'environnement (tous ce qui est extérieur à l'entreprise, la concurrence ou l'évolution de marché par exemple.), l'entreprise (ses ressources, ses métiers...) et la direction générale. Il y a 3 temps, tout d'abord l'étude de marché, qui doit prendre en compte les besoins des dirigeants, les capacités de l'entreprise et l'état du marché (c'est ce équivaut au diagnostic chez le médecin). Ensuite il y a la mise en place du plan stratégique (ce qui équivaut au traitement pour le médecin) et enfin il y a le suivi de l'action stratégique (ce qui équivaut au suivi médical pour le médecin).

4- Le but du service marketing est de réussir à vendre le produit, alors que celui du service de production est de fabriquer un produit le plus fiable possible, et aussi le moins difficile à réaliser. Une des sources du conflit peut se situer sur le produit lui-même, où le service marketing peut trouver le produit trop complexe à utiliser (manuel trop long, trop de boutons...) et donc trop dur à vendre, alors que pour le service de production, le simplifier deviendrait trop complexe (changement des chaînes, apport d'aide électronique...)
Une autre source de conflit peut être le prix, le service marketing voudra (généralement, si ce n'est pas un produit de luxe) une baisse du prix pour faciliter les ventes. En revanche le service de production demandera une augmentation pour obtenir plus de moyens pour sa production.

5- Si auparavant les dirigeants pensaient qu'augmenter la rentabilité sociale, faisait baisser la rentabilité économique (et inversement), cela n'est plus vrai.
Il faut en fait considérer le schéma suivant :



L'idéal est donc de se situer dans le quadrant I. Même si il est difficile de passer du quadrant II au I, il ne faut pas diminuer la rentabilité sociale quand on se situe dans le quadrant II, car même si à court terme on risque de « tomber dans le III puis dans le IV.

Compte de résultat

Compte de résultat			
Charges		Produits	
Exploitation :		Exploitation :	
Achat matières premières	900	Production vendue	1847
Variation du stock	-40		
		Finance :	
Impôts, taxes	140		
frais EDF/GDF	85	Produits sur gain de change	3
frais de publicité	83		
frais de transport	42	Exceptionnel :	
loyers payés	100		
frais divers de gestion	40	Vente terrain agricole	52
amortissement matériel (10%)	50		
salaires versés	260		
charges salariales	130		
provisions client douteux (5%)	10		
Finance :			
frais financier sur emprunt	2		
Exceptionnel :			
	1802		1902

T Produits – Tcharges = 100
donc IS = 30
Bénéfice après IS = 70

Bi		
Actif		
	avant répartition	après répartition
<u>Actifs immobilisés ;</u>		
Immobilisations incorporelles	45	45
Achats équipement	350	350
Stock final matière première	60	60
<u>Actifs circulants :</u>		
Créances clients	190	190
Disponibilités	40	40
	685	685

lan		
Passif		
	avant répartition	après répartition
Capitaux propres :		
Capital social	400	400
Réserves légales	40	47
Réserves facultatives	60	74
Résultat :	70	0
Dettes :		
Dettes financières court terme	25	25
Dettes financières long terme	10	10
Dettes fournisseurs	50	50
Dividendes	0	49
Impôts sociétés	30	30
	685	685

Le 31/1/06

CONTRÔLE FINAL GF11

(1h30, sans documents ni calculette)

PREMIERE PARTIE (2 points par question)

1. Les quatre choix stratégiques liés à la croissance interne ou intensive de l'entreprise (modèle Ansoff).
2. Une SARL peut-elle être cotée à la Bourse de Paris ? Expliquez pourquoi.
3. Pourquoi le contrôle de gestion est-il plus délicat à réaliser dans une économie immatérielle que dans une économie matérielle ?
4. Principe de fonctionnement et intérêt d'un panel de consommateurs.
5. Différences essentielles existant entre un canal homogène de distribution et un canal hétérogène de distribution. Expliquez en quoi le choix de ce type de canal de distribution est conditionné par les caractéristiques propres du produit vendu.

SECONDE PARTIE (10points)

1. A partir des données comptables fournies ci-après, établir le compte de résultats ainsi que le bilan, avant et après répartition du résultat, au 31.12.05 de la société TEL qui vend des services informatiques auprès d'entreprises des Télécoms (8 points).
2. Calculez la valeur ajoutée et l'EBE de la société, ainsi que sa rentabilité économique avant impôt et sa marge brute d'autofinancement (2 points).

Toutes les valeurs sont exprimées en KEuros

Achats de marchandises = 120
Stock final de marchandises = 30 et Stock initial de marchandises = 20
Impôt sur les sociétés = Un tiers (33,33%) du solde total (produits - charges)
Dettes financières (emprunt bancaire) = 70
Créances clients = 360
Autres charges externes (loyers, pub, téléphonie, autres achats…) = 555
Impôts et taxes = 35
Répartition bénéfice après IS: 10% réserves légales, 40% autres réserves, 50% dividendes
Capital social = 210
Achat d'équipements télécoms le 1.7.03 (valeurs d'achat au 1.07.03) = 210
Achat d'équipements informatiques le 1.1.05(valeurs d'achat au 1.01.05) = 240
Les matériels informatiques et télécoms s'amortissent linéairement sur 3 ans.
Frais de personnel =865
Dettes fournisseurs = 20
Production vendue = 1650
Réserves légales = 20
Autres Réserves = 130
Frais financiers = 5
Disponibilités = 60
Immobilisations incorporelles (brevet) = 25
Produits financiers = 10
Ventes de marchandises = 150
Autres dettes sociales et fiscales = 130

AGNUS
Christelle

Mardi 31 janvier.

G F.

15,5

Première partie

1) Le modèle Ansoff correspond à un tableau à deux entrées :

produit / marché	nouveau	ancien
nouveau	I	II
ancien	III	IV

Le cas I correspond à une politique de diversification. L'entreprise cherche à faire autre chose que ces produits actuels qui touchent un autre marché.
Le cas IV correspond à une stratégie intensive, c'est-à-dire une stratégie de pénétration du marché.
Le cas II correspond à une stratégie d'extension du produit, on le fait entrer dans un nouveau marché, on étend sa portée.
Le cas III correspond à une stratégie d'extension de la gamme.

02

2) Une S.A.R.L. est une société à responsabilité limitée. Les personnes qui apportent le capital sont au minimum 2, sans obligation de capital minimum. Ils deviennent alors des associés et possède des parts de la société. Cependant ce capital n'est pas partagé sous forme d'actions dont les détenteurs serait par conséquent des actionnaires. Pour être côtée à la Bourse de Paris, il faut que la société propose des actions ce qui est le cas des S.A (Société Anonyme).
Une S.A.R.L. ne peut être côtée à la Bourse de Paris car son capital est partagé sous forme de parts et non d'actions.

02

3) Le contrôle de gestion consiste à quantifier le plus possible l'état de l'entreprise, son activité économique. Dans une économie

01

immatérielle cette quantification est plus délicate que dans une écon matérielle. Voilà pourquoi le contrôle de gestion est plus délicat pour un économie immatérielle que matérielle.

4) Un panel de consommateurs est un petit groupe de personnes choisie par l'entreprise pour les questionner de façon précise sur un pro à l'essai. Le principe de fonctionnement est simple. L'entreprise veut lancer un nouveau produit; celui-ci correspond à un besoin.

Mais l'entreprise doit tester si le besoin est bien contenté au final. Pour cela, elle choisit une catégorie de personnes qui est visé par le produit, dont elle définit les critères distinctifs. Elle leur propose alors un questionnaire. L'étude des résultats de ce questi fait l'intérêt du panel de consommateurs et permet à l'entreprise de savoir si le produit atteint ses objectifs.

5) Un canal homogène de distribution correspond à une distribution où l'on retrouve le même type de produit. Un canal hétérogène de distribution est une distribution applicable à des produits diver Lorsqu'on choisit un canal homogène de distribution, il s'agit de mettre en valeur la spécification du produit. Par exemple, on trouve des brosse à dent vendues exclusivement en pharmacie. Cela montre la volo de l'entreprise de mettre en valeur le côté hygiène de qualité. A l'inverse lorsqu'on choisit un canal hétérogène, le produit sera vendu parmi d'autre produit qui n'ont rien à voir. Par exemple, c'est le cas des grands magasins qui proposent plein de produit de la vie courant Les caractéristiques propres du produit vendu conditionne le type de ca de distribution. Si le produit vendu est spécifique il doit suivre le canal homogène. Si le produit est banalisé, de consommation courante, il doit suivre le canal hétérogène.

CE BILAN CE FAIT ANNEE PAR ANNEE

COMPTE DE RESULTATS AU 32.12.05 SCTE TEL			
CHARGES		PRODUITS	
ACHATS MARCH	120	PRODUCTION VENDUE	1650
DELTA STOCK	-10	VENTES MARCHANDISES	150
CHARGES EXT	555	PRODUITS FINANCIERS	10
IMPOTS ET TAXES	35	ne pas mettre delta stock	
FRAIS PERSO	865		
FRAIS FI	5		
DOTATION AUX AMORTISSEMENTS : 80 + 70	150		
TOTAL	1720		1810
RESULTAT ACTIVITES	90		
DELTA IS	30		
RESULTAT ACTI APRES IS	60		

CE BILAN EST UN CONSTAT EN QUELQUES SORTES AU 31.12.05 ET ON INSCRIT L'ETAT DES CHOSES A CE MOMENT PRECIS !!!

BILAN DU 1.01.05 AU 31.12.05 DE SCTE TEL				
ACTIF	ANNEE 2005	PASSIF	ANNE 2005	
	NET		AVANT repartition	APRES repartition
IMMOBILISE		CAPITAUX PROPRES		
EQUIP TELECOM: reste 6 MOIS car achat JUIL 03	35	CAPITAL SOCIAL	210	210
BRUT : 210 / AMORTISSEMENT : 35 (3 ANS)		RESERVES LEGALES	20	26
ANNEE 2004 : NET : 70		AUTRES RESERVES	130	154
EQUIP INFORMATIQUE	160			
BRUT : 240 / AMORTISSEMENT : 80 (3 ANS)		RESULTA ACTI AP IS	60	0
IMMOBILISATION INCORPO	25			
CIRCULANT		DETTES		
CREANCES CLIENTS	360	DETTES FI	70	70
STOCK FINAL MARCH	30	DETTES FOURNISSEUR	20	20
STOCK INI (20 EN 2004)		AUTRES DETTES FISC	130	130
DISPONIBILITES	60	IS	30	30
		DIVIDENDES	0	30
		IMPOTS & TAXES: NON	0	0
TOTAL	670		670	670
VALEUR AJOUTEE = prod vendue -(achats + delta stock + autres charges ext) ===			985	
EBE = VA - charges de perso - impots et taxes + subventions =====			85	
RENTAB ECO = EBE / TOTAL DES ACTIFS ======			12,68656716	%
MBA = Benef acivites apres IS + dotation amortissements + cession actif ======			210	

CONTROLE FINAL GF11 - INT 2006-2007
(1h30, sans document ni calculette)

PREMIERE PARTIE (2 points par question)

1. Quelle différence essentielle existe-t-il entre un produit star et un produit dilemme dans le modèle du Boston Consulting Group?

2. Créativité et innovation procèdent-ils du même management ? Commentez votre réponse.

3. Principes généraux de fonctionnement d'une structure matricielle d'entreprise.

4. Liens existant entre les notions de courbe de vie d'un produit (marketing) et de point mort (comptabilité/finance).

5. Citez et commentez au moins deux principes majeurs du système comptable français.

SECONDE PARTIE (10 points)

L'entreprise LUMPEN désire élargir sa gamme de scanners en se lançant dans la fabrication d'un scan de bureau sans fil.
Une étude commerciale montre que les prévisions de vente sur trois ans sont les suivantes :

- 600 KEuros pour l'année 2007
- 1 500 KEuros pour l'année 2008
- 900 KEuros pour l'année 2009

La fabrication des scanners nécessite l'achat d'une machine de 600 KEuros amortissable linéairement sur trois ans.
L'échéancier de paiement est le suivant :
80% du prix à la livraison au 1.1.2007 et le solde un an plus tard au 1.1.2008.
La valeur résiduelle de la machine que le fournisseur s'engage à racheter lors du premier semestre 2010 est fixée à 5% du prix d'achat initial.

Les coûts opérationnels entraînés par cet investissement sont de :
450 KEuros pour l'an 2007, 750 KEuros pour 2008, 550 KEuros pour 2009.

Il est précisé que l'entreprise LUMPEN accorde un délai de paiement moyen de 36,5 jours à ses clients et que le taux global d'IS (impôt sur les sociétés) est de 30%.

1. Indiquez en l'expliquant quelle est la durée totale de vie de cet investissement. *(2 points)*
2. Calculez le résultat financier cumulé sans actualisation de cet investissement sur toute sa durée de vie. *(6 points)*
3. En utilisant la méthode du pay-back, indiquez à quelle date (trimestre, année) se produit le retour d'investissement. *(2 points)*

CORRECTION GF11 CF1

(d'après la copie d'Yves-Henri Rambaud)

PREMIERE PARTIE

1. Le modèle du BCG s'appuie sur 2 axes :

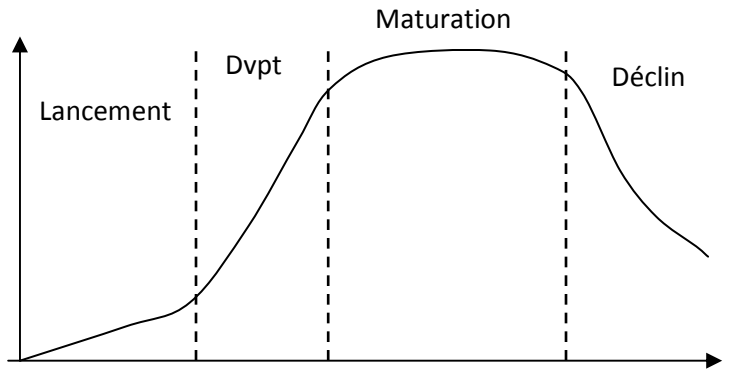
   La croissance du marché, et la part de marché des produits, qui sont représentés par un point (taille fonction du CA par exemple) sur cet espace à deux dimensions.

   ➔ Le produit star approche du monopole sur un marché qui évolue peu.
   ➔ Le produit dilemme, lui, a de bonnes parts de marché, mais sur un marché à évolution très rapide. Il faut donc beaucoup de travail pour maintenir ce produit à un haut niveau de part de marché à cause de la concurrence très rude.

2. La créativité est un concept qui décrit la façon de faire émerger des idées nouvelles, originales et qui changent vraiment de ce que l'on connait. Elle passe donc par des phases de brainstorming et d'analyse des idées. Tout le personnel de l'entreprise peut y être associé, on peut même inclure des personnes extérieures qui apportent des visions différentes. Son management commence au niveau des ressources humaines, il y a un aspect sensitif.
   L'innovation vise à sortir sur le marché un produit nouveau, on peut réutiliser un produit et changer son packaging (marketing), associer deux produits et/ou services dans un même lot, utiliser des technologies nouvelles ou combiner des technologies préexistantes, etc. On voit donc que ce management demande une connaissance précise de l'environnement (produits, technologies, concurrence) et un esprit de synthèse pour faire émerger des synergies. On est dans un aspect plus cartésien, plus utilitariste que dans le cas de la créativité.

3. Une structure matricielle est particulièrement bien adaptée à un management par projet. On peut la représenter par un tableau dans lequel les colonnes seraient les grandes fonctions d'une entreprise (finance, juridique, production, achats, etc.) et les lignes les différents projets ou départements de l'entreprise. Les individus prennent leur place dans les cases et remplissent une fonction, liée à un des projets conduits par l'entreprise.

4. La courbe de vie d'un produit représente le nombre de produits vendus (ou le CA) en fonction du temps. On distingue généralement 4 phases : lancement, développement, maturité et déclin.



Le point mort correspond au nombre de produits que l'entreprise doit vendre pour rembourser son investissement et ses coûts de production. Au-delà elle dégage un bénéfice.
Le point mort est atteint quand la zone située sous la courbe de vie est égale au nombre de produits à vendre pour atteindre ce dit point mort.

5. Le principe de précaution (qui n'existe pas aux Etats-Unis) consiste à inscrire dans les comptes de résultats les pertes éventuelles (probables), mais PAS les gains éventuels. Les gains ne sont insérés que lorsqu'ils sont sûrs.
   Le principe de continuité des exercices consiste à rattacher les valeurs à la cause qui les a vu naître (exemple d'une formation effectuée en décembre n-1, facturée en janvier n).
   Le principe d'exactitude consiste à ne tolérer aucune erreur d'écriture (pas même de quelques centimes) alors qu'aux Etats-Unis on tolère de faibles écarts).

SECONDE PARTIE

1. Le rachat de la machine et les derniers paiements (facilités de 36,5 jours) s'effectuant en 2010, cet investissement aura des effets sur le bilan et le compte de résultats pendant 4 ans, de 2007 à 2010. On peut considérer alors qu'il a une durée de vie de 4 ans. Mais avec l'impôt sur les sociétés payable l'année suivante (donc 2011), une durée de 5 ans.

2. Résultats financiers (l'impôt se payant l'année suivante).

   Le compte de résultat donnera :

k€	2007	2008	2009	2010
Ventes	600	1500	900	30
Amortissement machine	200	200	200	---
Coûts opérationnels	450	750	550	---
Résultat	-50	+550	+150	+30
IS payable année n+1 : 30%	-15	+165	+45	9

   Calculons le cash-flow (facilité de paiement : 10% x 1 an)

	2007	2008	2009	2010	2011
Ventes {	---	60	150	90	---
	540	1350	810	30	---
Achat machine	480	120	---	---	---
Coûts opérationnels	450	750	550	---	---
IS	---	15	165	45	9
CF	-390	555	245	75	-9

   Soit au total :

   Résultat financier = -390 + 555 + 245 + 75 – 9
   = <u>476 k€</u> (sans actualisation)

Méthode du payback :

On veut récupérer la somme investie I, soit 600k€, donc être revenu au niveau 0.

$$\sum_{1}^{n} CF\,n = 0$$

On remarque que cela se produit la 2ème année : 2008 ($\sum_{n=2007}^{n=2008} CFn = 165$)

$\frac{555}{4} \sim 139$

On gagne en moyenne 139 euros par trimestre (139 < 165). Le payback aura donc lieu le troisième trimestre de 2008.

CONTROLE INT 2006

(2ème session)

PREMIERE PARTIE (2 points par question)

1. L'innovation est-elle toujours associée à la création d'un nouveau produit ou l'utilisation d'une nouvelle technologie ?

2. Les principes de fonctionnement de la SARL.

3. Qu'est-ce qui distingue une opportunité économique d'une opportunité stratégique ?

4. La publicité est-elle la seule variable du marketing mix permettant de fournir des informations sur le produit ?

5. Principales différences existant entre un amortissement et une provision en comptabilité.

SECONDE PARTIE (10 points)

1. A partir des données comptables fournies ci-après, établir le compte de résultats ainsi que le bilan, avant et après répartition du résultat, au 31.12.06 de la société MINIMOY qui vend des abonnements télématiques auprès d'entreprises commerciales (8 points).
2. Calculez la valeur ajoutée et l'EBE de la société, ainsi que sa rentabilité économique avant impôt et sa marge brute d'autofinancement (2 points).

Toutes les valeurs sont exprimées en KEuros

Achat d'équipements informatiques le 1.7.06 (valeurs d'achat au 1.07.06) = 24
Achat d'équipements de bureau le 1.1.06 (valeurs d'achat au 1.01.06) = 15
Les matériels informatiques et de bureau s'amortissent linéairement sur 3 ans.
Achats de marchandises = 30
Stock final de marchandises = 8 et Stock initial de marchandises = 6
Créances clients = 180
Provisions pour clients douteux = 6
Autres charges externes (loyers, pub, téléphonie, autres achats…) = 273
Impôts et taxes = 28
Répartition bénéfice après IS : 5% réserves légales, 20% autres réserves, 75% dividendes
Capital social = 75
Frais de personnel = 420
Dettes fournisseurs = 4
Vente de services = 1020
Réserves légales = 15
Autres réserves = 122
Disponibilités = 91
Immobilisations financières = 15
Produits financiers = 12
Autres dettes sociales et fiscales = 12
Brevet et autres valeurs immobilisés = 80
Produit exceptionnel = 2
Impôt sur les sociétés = 33,33% du solde total (produits – charges)

DROIT IG1 2008 : CF1

1) Vous avez un chat d'appartement ; il est bien habitué à la vie confinée dans des pièces sans jardin. Tout va bien pour lui et pour vous. Vous allez rendre visite à un ami qui possède un canari apprivoisé. Dès que votre chat aperçoit le canari, il se précipite sur lui, il le blesse et n'aurait pas manqué de le tuer si votre ami n'était pas intervenu très rapidement, donnant une forte raclée à votre chat pour s'être laissé aller à ses instincts de chasseur. Votre chat a en outre cassé un vase de grande valeur. L'amitié est suspendue par cet incident. Vous apprenez, au bout de quinze jours, que le canari survivra. Malheureusement, vos revenus ne vous permettent pas de rembourser le vase. Votre ex-ami est très rancunier, cela, vous le savez depuis longtemps. Que peut-il contre vous ? Justifiez votre réponse.

2) Vous êtes embauché (e) le 1er septembre 2011 dans le cadre d'un CDD de projet pour réaliser un logiciel fort complexe. Le 16 septembre 2012, votre employeur veut rompre votre contrat, prétendant que vous n'avez pas avancé comme prévu dans votre travail. Cela est-il conforme au droit ? Si oui, pourquoi ? Si non, explicitez votre raisonnement.

3) Vos parents ont fait construire dans les Causses une maison de deux étages, pour recevoir leurs deux enfants et leur compagnon ou compagne, éventuellement, des petits-enfants. Lors des opérations préalables à la réception, l'architecte qui assiste vos parents fait reprendre une malfaçon. Ensuite, la réception est prononcée et vos parents deviennent les propriétaires de la maison de leurs rêves. Au bout de six mois, le papier du séjour se craquèle. Vos parents veulent faire reprendre cette tapisserie par l'entrepreneur. Ont-ils raison ? Justifiez votre réponse. Au bout de 18 mois après la réception, un meuble, dissociable du gros œuvre est abîmé. Vos parents ont-ils un recours ? Si oui, lequel ?

4) Votre cousin est chercheur ; il travaille dans un laboratoire pharmaceutique. Dans le cadre d'une équipe, il met au point avec des collègues un médicament qui peut prolonger le pronostic vital d'une maladie neurologique. L'employeur fait savoir à l'équipe « Vous ne toucherez pas de prime pour cette invention. Tout d'abord, vous êtes chercheur et vous êtes payé (e) pour chercher et éventuellement pour trouver. Par ailleurs, nous devrons attendre longtemps la mise sur le marché. Enfin, nos bénéfices seront réduits car ce médicament n'a un impact que sur trois maladies neurologiques, dont une orpheline ». Votre cousin et ses condisciples peuvent-ils obtenir une gratification ? De quelle façon ? Explicitez.

5) Vous regardez par désoeuvrement une émission de télé-achat ; un animateur vous propose un produit qui vous permettra de maigrir un peu, sans régime, et sans soulever de fonte dans un gymnase. Vous êtes un peu sceptique, mais comme vous êtes un peu las (se) du fitness, vous commandez le produit. Ce dernier est livré en temps et en heure. Vous essayez le produit qui ne vous satisfait pas. Au bout de quinze jours, vous demandez à être remboursé (e) ; le vendeur refuse. Pouvez-vous intenter une action ? Justifiez votre réponse.

Rapide corrigé du CF1 d'IG1 de 2008 :

1) Le chat est assimilable à un objet, et on doit être responsable de ses objets. Pour le jugment, le tribunal sera différent suivant le prix du vase.

2) CDD projet : correspond à un projet réservé aux cadres et aux ingénieurs
La période de ce CDD doit être de 18 à 36 mois.
Ici, la durée du contrat serait inférieure au temps minimal, donc la rupture est impossible.
De plus, une rupture doit toujours être motivée, sauf lors d'une période d'essai.

3) La garantie de parfait achèvement dure pendant les 12 mois suivant la réception.
La garantie de bon fonctionnement vaut pour ce qui est différentiable du gros œuvre.
Donc dans les 2 cas, il y a possibilité de recours.

4) Les inventions que le chercheur a faites, seront exploitées par l'employeur. Le chercheur n'a pas de droit patrimoniaux mais des droits moraux…
L'argument de l'employeur est donc bon.
Dans ce cas, le CNIS pourra jouer un rôle de conciliateur.

5) Deux choses :

- Publicité pouvant induire en erreur : action possible sur la publicité mensongère.
- Pour le renvoyer, le consommateur avait bien 15 jours, mais il ne devait pas l'utiliser, il devait le laisser emballé. Ici, pas d'action possible.

Rappel : Ce corrigé donne des indications pour les cas présentés. Il faut en plus présenter de façon précise l'élément juridique sur lequel vous vous appuyez.

DROIT IG1 2008 : CF2

1) *Période d'essai*
Vous êtes en troisième année et vous avez satisfait aux exigences de votre majeure. Vous trouvez une convention de stage de six mois dans une entreprise qui convient à vos aspirations. L'ambiance est chaleureuse et vous côtoyez d'autres stagiaires qui appartiennent à la même génération que vous et qui ont des goûts identiques. Vous vous faites apprécier par le maître de stage et le service RH vous propose un CDI à des conditions favorables. Nous sommes en septembre 2010. Votre période d'essai est de cinq mois, reconductible une fois. Quand se termine votre période d'essai (en supposant qu'il n'y ait pas de rupture de la période d'essai) ? Votre employeur finit par se convaincre que vous ne correspondez pas au profil souhaité. Il vous annonce la rupture de la période d'essai en décembre 2010. Vous doit-il quelque chose ? Si oui, justifiez votre réponse.

2) *Transport*
Vous conduisez une automobile. La vitesse est limitée à 30km/heure. Le radar vous flashe à 38 km/heure. On vous retire un point sur votre permis de conduite et vous devez payer une amende. Furieux (se), vous injuriez le policier et vous lui déclarez qu'il ne faut pas compter sur vous pour payer cette amende. Que risquez-vous ? Explicitez.
Vous êtes converti (e) à la bicyclette. Plus de voiture pour vous gâcher la vie ! Ecologie et sport sont désormais vos maîtres-mots…. Mais vous n'êtes pas monté(e) sur une bicyclette depuis l'âge de douze ans. Vous circulez sur une piste cyclable, empruntée également par des piétons. Lorsqu'un jeune garçon déboule sur la piste cyclable, en quête de son ballon de football, vous ne pouvez l'éviter. Le garçon a un genou et une clavicule cassés. Quelles sont les conséquences auxquelles vous devez faire face ?

3) *Marque*
Votre cousin crée une entreprise consacrée aux animaux qui ne sont pas familiers.
Vous vendez avec l'animal un habitacle qui vous permet de surfacturer le produit. Pour rendre l'habitacle attractif, vous déposez une marque « Ratatouillez-vous ». Vous faites remarquer que cette marque s'inspire du titre d'un film à grand succès et que la marque risque de vous attirer un procès. Atteinte au droit d'auteur, parasitisme peuvent être invoqués. Votre cousin n'est pas d'accord : la marque se distingue aisément de la dénomination du film ; le principe de spécialité est respecté. Maintenez-vous votre point de vue initial ? Explicitez.

4) *Barbecue*
Vous organisez un barbecue, au grand dam de votre voisin, qui vous reproche des nuisances olfactives et sonores (c'est un barbecue de minuit/ une heure du matin). Le lendemain matin, il vous interpelle : « Tu n'as pas intérêt à recommencer. Décidément, les jeunes sont d'une sottise sans nom » (En fait, il utilise des termes plus crus). Exaspéré (e), vous le giflez , ce qui le fait saigner du nez (deux témoins, des voisins aussi, sont présents). Il rentre chez lui, en commentant « Tu ne l'emporteras pas au paradis ! ». Courez-vous un risque ?

Rapide corrigé du CF2 d'IG1 de 2008 :

1) En cas de rupture de période d'essai, l'employeur ne doit rien, les 2 parties sont libres.
Or depuis 2008 la période d'essai est de 4 mois renouvelable 1 fois.
Il y a donc une rupture abusive du contrat : tribunal de grande instance.

2) Le retrait de point est bien justifié. De plus avec l'outrage à agent dans l'exercice de cette fonction, il y a un risque de payer une forte amende.
Les blessures involontaires constituent un délit. Il y a une possibilité des parents de porter l'affaire au tribunal correctionnel, et les risques sont : réparation civile + prix de la douleur + possibilité prison avec sursis.

3) Il y a une inspiration d'une production célèbre, dont le cousin tire partie. C'est une marque déjà déposé, donc il y a possibilité de procès pour parasitisme.

4) Le premier problème est le tapage nocturne : possibilité de juge de proximité.
L'affaire pourrait rester devant le juge de proximité aussi pour la gifle.

Rappel : Ce corrigé donne des indications pour les cas présentés. Il faut en plus présenter de façon précise l'élément juridique sur lequel vous vous appuyez.

Institut National des Télécommunications – Télécom INT

Domaine Gestion, Droit et Economie : module DR 12 – Claudine GUERRIER

Lundi 15 mai 2006 de 17h à 18h30 (1h30)

Documents et calculatrice interdits

1) L'un de vos amis, 27 ans, est pompier professionnel et donc fonctionnaire. Lors d'une catastrophe, il est mis en cause par sa hiérarchie, qui considère qu'au lieu de venir en aide à des personnes en danger, il a, par sa maladresse, causé la mort de plusieurs enfants au lieu de leur venir en aide. Il est suspendu de ses fonctions. Se considérant comme victime d'une injustice, il intente une action en justice. Devant quel tribunal ? Débouté, il décide de faire appel. Devant quel Cour ?
Il est par ailleurs, mis en examen pour homicide involontaire. La procédure est longue mais il finit par être jugé. Par quel tribunal ? Il est relaxé, à son grand soulagement. Cette décision aura-t-elle un impact sur son avenir professionnel ? Justifiez vos réponses.

2) Un artisan boucher embauche un commis dans le cadre d'un contrat nouvelle embauche. Le garçon a vingt-deux ans et n'a aucune expérience professionnelle mais il y a pénurie de personnel dans le domaine de la boucherie. Le boucher « forme » son employé pendant plusieurs mois et lui a tenu des propos rassurants « Si tu me donnes satisfaction, ton emploi sera sûr ». Pendant les six premiers mois, les pensées des deux protagonistes sont bien différentes : Le boucher « Il n'est pas doué, mais il a de la bonne volonté. C'est mieux que rien ». Le commis « Moi qui suis végétarien, je manipule de la viande animale et des carcasses ! Cela me dégoûte ! Et il fait si froid dans ce métier ! Mais j'étais au RMI ! C'est mieux que rien » Au bout de neuf mois, le commis déteste de plus en plus son emploi, ce qu'il dissimule de son mieux. Il lui arrive néanmoins d'arriver à son travail avec dix minutes de retard. Cela met en colère son patron qui est très attaché à la ponctualité. Il lui adresse une remarque sévère et le commis respecte de nouveau ses horaires. Mais la conjointe du boucher, qui assure le métier de vendeuse et a pris la peine d'étudier les états d'âme du jeune collaborateur, attire l'attention de son mari. Celui-ci, après beaucoup de démarches et de difficultés, trouve un nouvel élément et renvoie son commis. « Pourquoi me renvoyez-vous ? » « Pourquoi ? A cause de tes retards ». Le commis dispose-t-il d'un recours ?

3) Vos parents, après avoir vendu leur appartement, font construire une maison en banlieue. Tout se passe bien pendant trois ans. Pendant la quatrième année, la chaudière fonctionne avec difficultés. Vos parents font appel à un premier homme de l'art, en vain. Ils font ensuite appel à un deuxième homme de l'art qui établit son diagnostic, répare la chaudière et présente sa facture. Ce personnage astucieux explique : « c'est un vice caché ». A-t-il raison ? Vos parents peuvent-ils invoquer un vice caché ? Si oui, quelle personne mettent-ils en cause ? Selon vous, peuvent-ils obtenir satisfaction ?

4) Un de vos amis, titulaire d'un master 2 pro, après douze mois de stage, trouve un CDD. Motif : Surcroît de travail temporaire. Durée : six mois. Dans les faits, il occupe une fonction de cadre et le responsable Ressources humaines lui a déclaré « Si vous donnez satisfaction, votre CDD sera transformé en CDI ». Votre ami se donne beaucoup de mal. Il travaille jusqu'à vingt-et-une heures et commence à huit heures du matin. Mais l'entreprise traverse une période difficile et un licenciement collectif important, avec plan de sauvegarde de l'emploi, est décidé. Votre ami craint de monter dans la charrette. Qu'en sera-t-il ? Justifiez votre réponse. Finalement, votre ami garde son emploi. Le CDD est reconduit une fois. A sa grande déception, il n'est pas transformé en CDI. Votre ami dispose-t-il d'un recours ? Justifiez votre réponse.

5) M. Martín est chercheur dans l'entreprise de jouets électroniques « Ludotex ». Il a réalisé une invention, un jeu éducatif et humoristique sur le monde animal. Il a reçu un treizième mois. Cette rétribution vous semble-t-elle suffisante ? Justifiez votre réponse. Par ailleurs, en dehors de ses heures de travail, il met au point une invention dans le domaine gustatif. L'entreprise a-t-elle des droits sur l'invention ? Par qui cette dernière peut-elle être exploitée ? Précisez votre réponse.

Contrôle IG1 2007 « Economie et droit », volet juridique, sans documents

1) Un conflit éclate dans un pays que nous appellerons République démocratique Hellzachaubau (RDH). Le litige met en présence deux ethnies, que nous dénommerons les Zags et les Zogs. Les Zags sont majoritaires dans l'ensemble du pays et ils ont la maîtrise de la vie économique et politique (gouvernement). Les Zags reçoivent des armes des USA et de Russie, les Zogs des USA et de la France. Les Zogs sont cependant majoritaires dans le sud du pays et ils proclament unilatéralement leur indépendance. Les Zags n'admettent pas cette « rébellion » et cette atteinte à l'indivisibilité de la République. Ils déploient leur arsenal militaire et ont tôt fait de briser le rêve d'indépendance. Pour empêcher toute velléité de terrorisme, ils massacrent 100000 Zogs, se livrent au pillage systématique. La communauté international s'émeut et le Conseil de sécurité de l'ONU se saisit de l'affaire. Un embargo est adopté contre la RDH. Existe-t-il un recours juridictionnel au niveau international ? Si oui, sur quelles bases ? Le chef du gouvernement de la RDH peut-il être poursuivi ? Justifiez votre réponse.

2) L'un de vos petits-cousins est poissonnier. Il vend des truites élevées dans les meilleures conditions sanitaires. Il dispose d'un agréable magasin sis dans un endroit pittoresque à souhait. Il a une clientèle fidélisée. Le mardi et le vendredi matin, il organise une tournée dans les cinquante kms avoisinants où sont blottis de nombreux petits villages qui ne connaissent ni Carrefour ni Leclerc. Cette tournée est la seule possibilité offerte aux amateurs de se procurer des truites relativement fraîches à un tarif point trop élevé. Un acheteur s'exclame « J'ai oublié mon porte-monnaie. Je prends le poisson et je reviens vous payer » « Vous avez cinq euros sur vous. Donnez-les moi ; vous me paierez le reste à votre retour, avec votre porte-monnaie » « Il n'en est pas question. Vous êtes un démarcheur. Vous ne pouvez me réclamer d'acompte ». Qui a raison ? Justifiez votre réponse.

3) Votre oncle a gardé un goût pour les livres de son adolescence. Après s'être séparé de ses livres à quatorze ans, il cherche à reconstituer une collection. Il est particulièrement intéressé par la série « Michel » de Georges Bayard. A la foire aux livres de son quartier, il déniche « Michel et la falaise mystérieuse », en collection cartonnée. Il cherche à en faire l'acquisition. Le vendeur oppose un refus « C'est mon exemplaire de présentation et il n'est pas toujours facile de retrouver ces ouvrages des années mille neuf cent cinquante ». Votre oncle menace de saisir la direction générale de la concurrence, de la consommation et de la répression des fraudes. Qui a raison ? Justifiez votre réponse.

4) L'un de vos amis est étudiant à Paris X. Dans le cadre de son mastère, il effectue un stage de soixante-dix jours. Il contribue à la bonne marche de l'entreprise. Il s'étonne de ne pas percevoir d'émoluments. Le responsable du service « Ressources humaines » lui indique : « Dans une convention de stage, il n'y a pas de rémunération ». Qui a raison ?
   Le même ami est ensuite employé sous CNE par une très petite entreprise de cinq salariés (dont un seul sous CDI). Il semble donner satisfaction à son employeur jusqu'au jour où il arrive en retard (il a de la fièvre). L'employeur fait remarquer : « Pas capable d'arriver à l'heure ». Deux jours plus tard, l'employeur rompt le CNE. Votre ami intente une action devant le Conseil de Prud'hommes. Il invoque la

Convention 158 et l’absence de motif réel et sérieux. Selon vous, quel sera le jugement du Conseil de Prud’hommes ? Justifiez votre réponse.

5) Vous êtes un (e) philatéliste passionné (e). Vous faites l’acquisition, dans un contexte officiel, d’un timbre rare (émanant de Mongolie). Le vendeur est honnête et il ne cherche pas à vous tromper sur la valeur du timbre, que vous montrez à vos ami (e) s, intéressé (e) s ou non par la philatélie. Un jour, Théo, un expert en timbres vous affirme : c’est un faux. Vous ne le croyez pas mais vous faites cependant à deux autres experts, par sécurité. Ils confirment le verdict de Théo. Pouvez-vous intenter une action contre le vendeur ? Si oui, sur quelle base ? Pouvez-vous obtenir satisfaction ? Comment, selon vous, se conclura l’affaire ?

UV Informatique

AP - AM

Caliente

AP11 - Enoncé du Contrôle Continu d'Algorithmique
Lundi 17 octobre 2005

Document autorisé : le polycopié distribué en cours
Veuillez préciser votre groupe à côté de vos nom et prénom

Soit un nombre noté *nombre* (*nombre* $\geq$ 10) de *nbChiffres* chiffres. Pour déterminer si *nombre* est un nombre de *Keith*, on procéde de la manière suivante :
On remplit un tableau de *nbChiffres* éléments avec les chiffres de *nombre*. On calcule la somme des éléments de ce tableau. Cette valeur est ensuite « injectée » en fin de tableau en décalant les autres éléments et en perdant la première valeur (correspondant au chiffre de poids fort du nombre à tester à la première itération).
On réitère ce processus, les sommes calculées formant une suite monotone croissante. Si une somme calculée est égale au nombre à tester, ce nombre est de *Keith*. Sinon elle deviendra strictement supérieure au nombre à tester et on s'arrêtera.
Pour vous aider à comprendre cette méthode, voici son déroulement pour *nombre* = 197 ; elle nécessite un tableau de trois naturels :

étape 1	1	9	7	somme = 17
étape 2	9	7	17	somme = 33
étape 3	7	17	33	somme = 57
étape 4	17	33	57	somme = 107
étape 5	33	57	107	somme = 197

197 est un nombre de *Keith*.
Les nombres de *Keith* à deux chiffres : 14, 19, 28, 47, 61, 75
Les nombres de *Keith* à trois chiffres : 197, 742
Les nombres de *Keith* à quatre chiffres : 1104, 1537, 2208, 2580, 3684, 4788, 7385, 7647, 7909
Voici le déroulement de la méthode pour *nombre* = 1537 ; elle nécessite un tableau de quatre naturels :

étape 1	1	5	3	7	somme = 16
étape 2	5	3	7	16	somme = 31
étape 3	3	7	16	31	somme = 57
étape 4	7	16	31	57	somme = 111
étape 5	16	31	57	111	somme = 215
étape 6	31	57	111	215	somme = 414
étape 7	57	111	215	414	somme = 797
étape 8	111	215	414	797	somme = 1537

Par contre 117 n'est pas un nombre de *Keith*

étape 1	1	1	7	somme = 9
étape 2	1	7	9	somme = 17
étape 3	7	9	17	somme = 33
étape 4	9	17	33	somme = 59
étape 5	17	33	59	somme = 109
étape 6	33	59	109	somme = 201

car les valeurs successives de la somme ont « dépassé » 117 sans qu'il y ait eu égalité.

Vous devez définir, **dans notre langage algorithmique**, la fonction *estNombreDeKeith* qui prend un paramètre *nombre* de type Naturel et qui renvoie un booléen égal à VRAI si *nombre* est un nombre de *Keith*, à FAUX sinon.
Dans cette fonction, il faudra définir un tableau pour stocker les différentes valeurs manipulées. Mais comme en langage algorithmique, un tableau est de longueur fixée à l'avance, on définira une constante *NB_MAX_CHIFFRES* égale à neuf. Le nombre à tester devra être strictement inférieur à un milliard.

constante NB_MAX_CHIFFRES = 9 // Le nombre à tester doit être inférieur à 1 000 000 000

tabNombres : **tableau** [1..NB_MAX_CHIFFRES] **de** Naturel

De ce fait, il faudra définir dans la fonction *estNombreDeKeith* une variable *nbChiffres* de type Naturel qui contiendra le nombre de chiffres de la valeur à tester (c'est à vous de le calculer). Vous n'utiliserez dans le tableau *tabNombres* que les cases comprises entre les indices 1 et *nbChiffres* inclus.

Adoptez une démarche descendante ; ce problème s'y prête très bien. Vous pouvez, mais ce n'est qu'un conseil, définir :
- une fonction pour calculer le nombre de chiffres de la valeur à tester
- une procédure pour initialiser le tableau *tabNombres* entre les indices 1 et *nbChiffres*
- une fonction pour calculer la somme des éléments « utiles » du tableau *tabNombres*
- une procédure pour modifier le tableau *tabNombres* entre les indices 1 et *nbChiffres*

Définissez également la fonction *principale* en prenant soin de vérifier que la valeur à tester saisie par « l'utilisateur » est bien strictement inférieure à un milliard et supérieure ou égale à dix.

AP11 - Corrigé du Contrôle Continu d'Algorithmique

Soit un nombre noté *nombre* (*nombre* $\geq$ 10) de *nbChiffres* chiffres. Pour déterminer si *nombre* est un nombre de *Keith*, on procéde de la manière suivante :
On remplit un tableau de *nbChiffres* éléments avec les chiffres de *nombre*. On calcule la somme des éléments de ce tableau. Cette valeur est ensuite « injectée » en fin de tableau en décalant les autres éléments et en perdant la première valeur (correspondant au chiffre de poids fort du nombre à tester à la première itération).
On réitère ce processus, les sommes calculées formant une suite monotone croissante. Si une somme calculée est égale au nombre à tester, ce nombre est de *Keith*. Sinon elle deviendra strictement supérieure au nombre à tester et on s'arrêtera.
Pour vous aider à comprendre cette méthode, voici son déroulement pour *nombre* = 197 ; elle nécessite un tableau de trois naturels :

étape 1	1	9	7	somme = 17
étape 2	9	7	17	somme = 33
étape 3	7	17	33	somme = 57
étape 4	17	33	57	somme = 107
étape 5	33	57	107	somme = 197

197 est un nombre de *Keith*.
Les nombres de *Keith* à deux chiffres : 14, 19, 28, 47, 61, 75
Les nombres de *Keith* à trois chiffres : 197, 742
Les nombres de *Keith* à quatre chiffres : 1104, 1537, 2208, 2580, 3684, 4788, 7385, 7647, 7909
Voici le déroulement de la méthode pour *nombre* = 1537 ; elle nécessite un tableau de quatre naturels :

étape 1	1	5	3	7	somme = 16
étape 2	5	3	7	16	somme = 31
étape 3	3	7	16	31	somme = 57
étape 4	7	16	31	57	somme = 111
étape 5	16	31	57	111	somme = 215
étape 6	31	57	111	215	somme = 414
étape 7	57	111	215	414	somme = 797
étape 8	111	215	414	797	somme = 1537

Par contre 117 n'est pas un nombre de *Keith*

étape 1	1	1	7	somme = 9
étape 2	1	7	9	somme = 17
étape 3	7	9	17	somme = 33
étape 4	9	17	33	somme = 59
étape 5	17	33	59	somme = 109
étape 6	33	59	109	somme = 201

car les valeurs successives de la somme ont « dépassé » 117 sans qu'il y ait eu égalité.

Vous devez définir, **dans notre langage algorithmique**, la fonction *estNombreDeKeith* qui prend un paramètre *nombre* de type Naturel et qui renvoie un booléen égal à VRAI si *nombre* est un nombre de *Keith*, à FAUX sinon.

```
constante NB_MAX_CHIFFRES = 9 // Le nombre à tester doit être inférieur à 1 000 000 000

fonction estNombreDeKeith ( nombre : Naturel ) : Booléen

    nbChiffres = nombreChiffres ( nombre ) : Naturel
    sommeNombres : Naturel
    tabNombres : tableau [ 1..NB_MAX_CHIFFRES ] de Naturel

    initialiserTabNombres ( nombre , nbChiffres, tabNombres ) // version directe
    // version inverse : initialiserTabNombres ( nombre , tabNombres )

    faire
        sommeNombres ← sommeTabNombres ( nbChiffres , tabNombres )
        modifierTabNombres ( nbChiffres , sommeNombres , tabNombres )

    tant que sommeNombres < nombre

    retourner ( sommeNombres = nombre )

ffct estNombreDeKeith
```

Définition de la fonction *nombreChiffres*

```
fonction nombreChiffres ( nombre : Naturel ) : Naturel

    nb = 0 : Naturel // valeur à retourner

    tant que nombre ≠ 0 faire
        nb ← nb + 1
        nombre ← nombre div 10
    ftq

    retourner nb

ffct nombreChiffres
```

Définition de la procédure *initialiserTabNombres*

```
procédure initialiserTabNombres ( donnée nombre, nbChiffres : Naturel
                                  résultat tNombres = tableau [ 1..NB_MAX_CHIFFRES ] de Naturel )

    i = nbChiffres : Naturel // indice le tableau de nombres

    tant que nombre ≠ 0 faire // ou tant que i > 0 faire
        tNombres [ i ] ← nombre mod 10
        nombre ← nombre div 10
        i ← i - 1
    ftq


fproc initialiserTabNombres
```

Définition de la fonction *sommeTabNombres*

```
fonction sommeTabNombres ( nbChiffres : Naturel,
                           tNombres = tableau [ 1..NB_MAX_CHIFFRES ] de Naturel ) : Naturel

    somme = 0 : Naturel // valeur à retourner

    pour i = 1 : Naturel à nbChiffres
        somme ← somme + tNombres [ i ]
    fpour i

    retourner somme

ffct sommeTabNombres
```

Définition de la procédure *modifierTabNombres*

```
procédure modifierTabNombres ( donnée nbChiffres, somme : Naturel
                               donnée-résultat tNombres = tableau [ 1..NB_MAX_CHIFFRES ] de Naturel )

    pour i = 1 : Naturel à nbChiffres - 1
        tNombres [ i ] ← tNombres [ i + 1 ]
    fpour i
    tNombres [ nbChiffres ] ← somme

fproc modifierTabNombres
```

Définition de la fonction *principale*

```
fonction principale ( ) : CodeRetour

    nombreAtester : Naturel

    faire
        afficher ( "saisir un nombre ≥ 10 et < 1 000 000 000" )
        saisir ( nombreAtester )
    tant que nombreAtester < 10 ou nombreAtester ≥ 1 000 000 000

    afficher ( nombreAtester )
    si estNombreDeKeith ( nombreAtester ) alors
        afficher ( " est " )
    sinon
        afficher ( " n'est pas " )
    fsi
    afficher ( "un nombre de Keith." )
    allerAlaLigne ( )

    retourner OK

ffct principale
```

AP11 - Enoncé du Contrôle Continu d'Algorithmique
Vendredi 27 octobre 2006

Durée : 1 heure
Document autorisé : le polycopié distribué en cours
Veuillez préciser votre groupe à côté de vos nom et prénom

Calculer la racine carrée d'un réel strictement positif noté *a* revient à résoudre l'équation $x^2 = a$. On en déduit alors :

$$x^2 = a \Rightarrow 2x^2 = x^2 + a \Rightarrow x = \frac{x^2+a}{2x} \Rightarrow x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$$

Si l'on indice la variable *x* selon qu'elle se trouve dans le membre droit ou le membre gauche de la dernière équation ci-dessus, on obtient la formule de récurrence suivante :

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}(x_i + \frac{a}{x_i})$$

En posant $x_0 = a$, on retrouve l'algorithme attribué à *Héron d'Alexandrie* (1er siècle ap. J.-C.) mais les babyloniens connaissaient déjà cette méthode. En fait, on peut faire démarrer l'algorithme avec n'importe quelle valeur strictement positive. Mais le nombre de calculs pour obtenir la racine carrée d'un nombre avec une précision convenable est dépendant de ce nombre.
On vous **fournit** donc une fonction *valeurInitiale* qui prend un paramètre *a* de type Réel (le nombre dont on cherche la racine carrée) et qui renvoie un réel. Celui-ci vous servira de valeur initiale x_0. Voici la signature de cette fonction :

fonction valeurInitiale (a : Réel) : Réel

Encore une fois, **vous n'avez pas à définir cette fonction**. Vous trouverez sa définition dans le corrigé. Sachez simplement qu'avec cette valeur initiale, seulement **trois calculs successifs** permettront d'obtenir la racine carrée d'un nombre avec une précision convenable, et cela, quelque soit ce nombre.
On peut donc définir une constante *NB_CALCULS_MAX* que vous utiliserez dans les fonctions que vous avez à définir.

constante NB_CALCULS_MAX = 3

En utilisant cette méthode, définissez en **langage algorithmique** :

- la fonction **itérative** *racineCarréeItérative* qui prend deux paramètres *a* et *valInit* de type Réel et qui renvoie un réel : la racine carrée du nombre *a*. Voici la signature de cette fonction :

  fonction racineCarréeItérative (a, valInit : Réel) : Réel

- la fonction **récursive** *racineCarréeRécursive* qui prend deux paramètres *a* et *valInit* de type Réel,un paramètre *nbCalculs* de type NatureINonNul et qui renvoie un réel : la racine carrée du nombre *a*. Voici la signature de cette fonction :

  fonction racineCarréeRécursive (a, valInit : Réel, nbCalculs : NatureINonNul) : Réel

Définissez également la fonction *principale* qui permettra à l'utilisateur de saisir un nombre réel strictement positif. Elle vérifiera que la valeur saisie est correcte et appellera la fonction *valeurInitiale*. Finalement, elle affichera d'une manière lisible les valeurs retournées par les fonctions *racineCarréeItérative* et *racineCarréeRécursive*.

AP11 - Corrigé du Contrôle Continu d'Algorithmique

constante NB_CALCULS_MAX = 3

Définition de la fonction *principale* :

fonction principale ( ) : CodeRetour

    nombre : Réel

    afficher ("Saisir un réel > 0 : ")
    saisir (nombre)

    si nombre $\leq$ 0 **alors**
        afficher ("Erreur de saisie")
        allerAlaLigne ( )
        retourner KO
    sinon

        valInit = valeurInitiale (nombre) : Réel

        afficher ("Racine carrée de ", nombre, " est égale à ", racineCarréeItérative (nombre, valInit))
        allerAlaLigne ( )
        afficher ("Racine carrée de ", nombre, " est égale à ", racineCarréeRécursive (nombre, valInit, 1))
        allerAlaLigne ( )
    fsi

    retourner OK

ffct principale

Définition de la fonction *racineCarréeItérative* :

fonction racineCarréeItérative (a, valInit : Réel) : Réel

    x = valInit : Réel

    pour i = 1 : Naturel **à** NB_CALCULS_MAX
        x $\leftarrow$ (x + a / x) / 2
    pour i

    retourner x

ffct racineCarréeItérative

Définition de la fonction *racineCarréeRécursive* :

fonction racineCarréeRécursive (a, valInit : Réel, nbCalculs : NaturelNonNul) : Réel

si nbCalculs > NB_CALCULS_MAX **alors**
retourner valInit
sinon
x = racineCarréeRécursive (a, valInit, nbCalculs +1) : Réel
retourner (x + a / x) / 2
fsi i

ffct racineCarréeRécursive

Définition de la fonction *valeurInitiale* :

Cette fonction utilise une fonction *puissance*, supposée prédéfinie, qui prend deux paramètres *n* et *m* de type Entier et qui renvoie un réel égal à n^m (*n* et *m* pouvant être négatifs). Voici la signature de cette fonction :

fonction puissance (n, m : Entier) : Réel

On va mettre le nombre *a* sous la forme $a = m \times 4^p, 1/4 \leq m \leq 1$, et donc $\sqrt{a} = \sqrt{m} \times 2^p$. La courbe $\sqrt{x}$ et la droite d'équation $y = \frac{1+2x}{3}$ passent toutes les deux par les points ($\frac{1}{4}$,$\frac{1}{2}$) et (1,1) et sont assez proches sur l'intervalle $]1/4, 1[$. Ce qui nous permet d'approximer $\sqrt{m}$ par $\frac{1+2m}{3}$ sur l' intervalle $[1/4, 1]$.

fonction valeurInitiale (a : Réel) : Réel

p : Entier
m : Réel

si a < 1/4 **alors**
p ← 0
faire
p ← p - 1
m ← a / puissance (4, p)
tant que m < 1/4
sinon
p ← -1
faire
p ← p + 1
m ← a / puissance (4, p)
tant que m > 1
fsi

retourner ((1 + 2 x m) / 3) x puissance (2, p)

ffct valeurInitiale

AP11
Enoncé du Contrôle Continu de Langage C
Vendredi 6 janvier 2006

Document autorisé : le polycopié distribué en cours **Durée** : 1 heure

Vous devez impérativement utiliser la feuille jointe avec l'énoncé pour y inscrire les réponses aux questions posées à chacun des trois exercices.

- **Exercice 1** (sur 7 points) : Analysez ce premier programme C

monProgramme.c

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>

int main ( int argc, char **argv ) {

  if ( argc != 2 ) {
    fprintf ( stderr, "usage : %s nombre\n", argv[0] );
    exit ( EXIT_FAILURE );
  }

  int n = atoi ( argv[1] ), i = 0, j, s = 0;

  for ( ; i < n ; s += ++i );
  printf ( "%d\n", s );
  return "EXIT_SUCCESS";
}
```

Vous devez répondre aux questions suivantes :

1. comment compiler ce fichier source dans le but d'obtenir le fichier exécutable *monProgramme* en demandant au compilateur d'afficher toutes les erreurs
2. y a-t-il une erreur *fatale* (qui stoppe le processus de compilation)
3. y a-t-il des erreurs de type *« warning »* (qui ne stoppent pas le processus de compilation)
4. en supposant que les éventuelles erreurs soient corrigées, indiquez ce qui est affiché dans la fenêtre *shell* pour l'exécution de :
   - **$ monProgramme**
   - **$ monProgramme 3**
   - **$ monProgramme 5**
5. que calcule et affiche ce programme

– **Exercice 2** (sur 6 points) : Voici un second programme C

appels.c

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>

// Prototypes des fonctions

void f1 ( int a, int *b );
void f2 ( int *b, int c );
void f3 ( int *a, int c );
void f4 ( int **b, int a );

int main () {

  int x = 5, y = 7, z = 9;

  f1 ( x, &y );
  printf ( "x = %d, y = %d, z = %d\n", x, y, z );
  f2 ( &x, y );
  printf ( "x = %d, y = %d, z = %d\n", x, y, z );
  f3 ( &y, z );
  printf ( "x = %d, y = %d, z = %d\n", x, y, z );
  return 0;
}

// Définition des fonctions

void f1 ( int a, int *b ) {
  a = *b;
}

void f2 ( int *b, int c ) {
  *b = c;
}

void f3 ( int *a, int c ) {
  f4 ( &a, c );
}

void f4 ( int **b, int a ) {
  **b = a;
}
```

Ce programme compile normalement avec l'option *-Wall*. Il n'y a aucune erreur à l'exécution. Vous devez simplement écrire sur votre feuille de réponses ce que ce programme afficherait dans la fenêtre *shell* si on l'exécutait.

– **Exercice 3** (sur 7 points) : QCM à renseigner directement sur la feuille de réponses fournie
On rappelle qu'il y a au moins une réponse vraie pour chaque question et que :
  – toute case non-cochée correspondant à une réponse vraie entraîne une pénalité
  – toute case cochée correspondant à une réponse fausse entraîne également une pénalité

1. La valeur retournée par la fonction *main* peut être affichée sous le *shell* par la commande :
   - ☐ echo $STATUS
   - ☐ echo $?
2. La séquence d'instructions suivante provoque comme affichage :

   ```
   int n = 5 ;
   while ( n > 0 )  {
      n -= 2 ;
      printf ( " %d   ", n ) ; }
   ```

   - ☐ 5 3 1
   - ☐ 3 1 -1
   - ☐ 3 1
3. Quelle valeur contient la variable *n* après la séquence d'instructions suivante :

   ```
   int n, tab [ ] = { 2, 3, 4, 2 } ;
   n = * ( tab + tab [ 0 ] ) ;
   ```

   - ☐ 2
   - ☐ 3
   - ☐ 4
   - ☐ aucune car l'expression affectée à la variable *n* est syntaxiquement incorrecte
4. La déclaration **int (*f [ ]) (int, int) ;** considère *f* comme :
   - ☐ un tableau de fonctions de deux entiers retournant un pointeur d'entier
   - ☐ un tableau de pointeur sur fonctions de deux entiers retournant un entier
   - ☐ un pointeur sur un tableau de fonctions de deux entiers retournant un entier
5. Quand on veut lire à partir du clavier une séquence de caractères pouvant contenir des espaces, il faut utiliser :
   - ☐ la fonction *scanf*
   - ☐ la fonction *gets*
   - ☐ la fonction *fgets* car elle est sécurisée
6. Le fait de tester la valeur de retour de la fonction *fopen* :
   - ☐ évite de bloquer le processus de compilation
   - ☐ permet d'éviter le risque d'une « erreur de segmentation » à l'exécution
   - ☐ n'a aucune incidence
7. Quand on utilise correctement la fonction *fgets*, si la longueur d'une ligne lue à partir d'un fichier texte est supérieure au nombre de caractères demandé :
   - ☐ les caractères en nombre exédentaire ne sont pas lus
   - ☐ les caractères en nombre exédentaire sont perdus
   - ☐ les caractères en nombre exédentaire seront lus à l'appel suivant de *fgets*
8. Quand après en avoir lu une partie, on veut se repositionner en début d'un fichier ouvert en lecture seule, il vaut mieux :
   - ☐ utiliser la fonction *rewind*
   - ☐ fermer et réouvrir le fichier
   - ☐ utiliser la fonction *fseek* avec **0** et **SEEK_SET** comme 2ème et 3ème paramètres
9. Dans un fichier d'en-tête (**.h**), on peut trouver :
   - ☐ des définitions de types
   - ☐ des définitions de fonctions
   - ☐ des prototypes de fonctions
10. Si dans un fichier *makefile* on trouve la ligne suivante :

    monFichier.o : monFichier.o monFichier.h

    - ☐ ça ne pose aucun problème
    - ☐ cela produit une « dépendance circulaire »

AP11
Corrigé du Contrôle Continu de Langage C

– **Exercice 1** :

1. commande de compilation : **$ gcc -Wall monProgramme.c -o monProgramme**

2. y a-t-il une erreur *fatale* : **oui** □ **non** ■

3. y a-t-il des erreurs de type *« warning »* : **oui** ■ **non** □ , si **oui** lesquelles :

   – « return transforme en entier un pointeur sans transtypage » : *EXIT_SUCCESS* est une constante symbolique et non une chaîne de caractères
   – « variable inutilisée j »

4. en supposant que les éventuelles erreurs soient corrigées, indiquez ce qui est affiché dans la fenêtre *shell* pour l'exécution de :

   – **$ monProgramme**
   usage : monProgramme nombre

   – **$ monProgramme 3**
   6

   – **$ monProgramme 5**
   15

5. que calcule et affiche ce programme :

   – ce programme calcule et affiche la somme des *nombre* premiers naturels non nuls ; *nombre* étant l'argument de la commande *monProgramme*

– **Exercice 2** :

– **x = 5, y = 7, z = 9**

– **x = 7, y = 7, z = 9**

– **x = 7, y = 9, z = 9**

– **Exercice 3** : QCM

1. La valeur retournée par la fonction *main* peut être affichée sous le *shell* par la commande :
   □ echo $STATUS
   ■ echo $?
2. La séquence d'instructions suivante provoque comme affichage :

```
int n = 5 ;
while ( n > 0 )  {
   n -= 2 ;
   printf ( " %d   ", n ) ; }
```

- □ 5 3 1
- ■ 3 1 -1
- □ 3 1

3. Quelle valeur contient la variable *n* après la séquence d'instructions suivante :

   int n, tab [ ] = { 2, 3, 4, 2 } ;
   n = * (tab + tab [0]) ;

   - □ 2
   - □ 3
   - ■ 4
   - □ aucune car l'expression affectée à la variable *n* est syntaxiquement incorrecte

4. La déclaration **int (*f [ ]) (int, int) ;** considère *f* comme :
   - □ un tableau de fonctions de deux entiers retournant un pointeur d'entier
   - ■ un tableau de pointeur sur fonctions de deux entiers retournant un entier
   - □ un pointeur sur un tableau de fonctions de deux entiers retournant un entier
5. Quand on veut lire à partir du clavier une séquence de caractères pouvant contenir des espaces, il faut utiliser :
   - □ la fonction *scanf*
   - □ la fonction *gets*
   - ■ la fonction *fgets* car elle est sécurisée
6. Le fait de tester la valeur de retour de la fonction *fopen* :
   - □ évite de bloquer le processus de compilation
   - ■ permet d'éviter le risque d'une « erreur de segmentation » à l'exécution
   - □ n'a aucune incidence
7. Quand on utilise correctement la fonction *fgets*, si la longueur d'une ligne lue à partir d'un fichier texte est supérieure au nombre de caractères demandé :
   - ■ les caractères en nombre exédentaire ne sont pas lus
   - □ les caractères en nombre exédentaire sont perdus
   - ■ les caractères en nombre exédentaire seront lus à l'appel suivant de *fgets*
8. Quand après en avoir lu une partie, on veut se repositionner en début d'un fichier ouvert en lecture seule, il vaut mieux :
   - ■ utiliser la fonction *rewind*
   - □ fermer et réouvrir le fichier
   - ■ utiliser la fonction *fseek* avec **0** et **SEEK_SET** comme 2ème et 3ème paramètres
9. Dans un fichier d'en-tête (**.h**), on peut trouver :
   - ■ des définitions de types
   - □ des définitions de fonctions
   - ■ des prototypes de fonctions
10. Si dans un fichier *makefile* on trouve la ligne suivante :

    monFichier.o : monFichier.o monFichier.h

    - □ ça ne pose aucun problème
    - ■ cela produit une « dépendance circulaire »

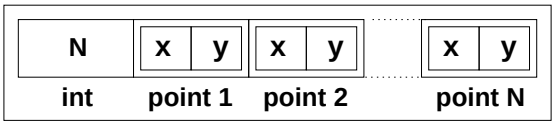
AP11 - Enoncé du Contrôle Continu de Langage C
Mercredi 10 Janvier 2007

Durée : 1 heure
Document autorisé : le polycopié distribué en cours
Vous devez impérativement utiliser la feuille jointe avec l'énoncé pour y inscrire les réponses aux questions posées à chacun des deux exercices.

Exercice 1 (sur 10 points)
La fonction ci-dessous permet de lire un fichier binaire de points. Le type *Point* est défini dans le fichier *point.h* comme une structure à deux champs de type *int* :

```
typedef struct { int x;
                 int y; } Point;
```

La structure du fichier est très simple ; le nombre de points codé sur un *int* suivi des différents points :



Voici la définition de la fonction C *lireFichier*, déclarée dans le fichier *io.h*, qui permet de lire le nombre de points et l'ensemble de points à partir du fichier de points :

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include "point.h"
#include "io.h"

Point *lireFichier ( FILE *f, int *pNb ) {

  Point *pPoint;

  // lecture du nombre de points
  fread ( pNb, sizeof(int), 1, f );

  // allocation dynamique du tableau de points
  if ( ( pPoint = malloc ( *pNb * sizeof(Point) ) ) == NULL ) {
    fprintf ( stderr, "Problème allocation mémoire\n" );
    exit ( EXIT_FAILURE );
  }
  // lecture de l'ensemble de points
  if ( fread ( pPoint, sizeof(Point), *pNb, f ) != *pNb ) {
    fprintf ( stderr, "Problème lecture fichier\n" );
    exit ( EXIT_FAILURE );
  }
  return pPoint;
}
```

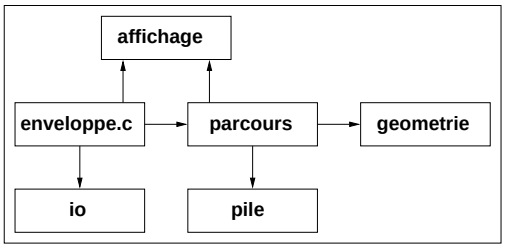
Et voici la fonction *main* qui appelle la fonction C *lireFichier* :

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include "point.h"
#include "io.h"
```

```
int main ( int argc, char **argv ) {

  Point *tabPoints = NULL; // ne pointe sur rien de valide pour l'instant
  int nbPoints;
  FILE *f;

  if ( argc != 2 ) {
    fprintf ( stderr, "usage : %s nomFichier\n", argv[0] );
    exit ( EXIT_FAILURE );
  }
  if( ( f = fopen ( argv[1], "rb" ) ) == NULL ) {
    fprintf ( stderr, "problème ouverture fichier\n" );
    exit ( EXIT_FAILURE );
  }
  // appel de la fonction lireFichier
  tabPoints = lireFichier ( f, &nbPoints );
  // la suite du programme
  return EXIT_SUCCESS;
}
```

Vous remarquerez que la fonction C *lireFichier* n'est pas typée *void* et qu'elle prend néanmoins un paramètre en résultat : *pNb*. Elle implémente un « mélange » de fonction et de procédure du langage algorithmique.
Si l'on voulait supprimer cette « anomalie », qui n'en est pas une pour le langage C, il faudrait typer *void* la fonction C *lireFichier* et lui rajouter un autre paramètre en résultat. C'est ce que vous avez à faire sur la feuille de réponses fournie.

Exercice 2 (sur 10 points)
Voici, représentée graphiquement, une application qui détermine l'enveloppe convexe d'un ensemble de points dans le plan.



Cette application est constituée d'un programme principale *enveloppe.c* (qui contient la définition de la fonction *main*) et de cinq modules. Chaque module est constitué d'un fichier *.h* (l'interface du module) et d'un fichier *.c* (sa réalisation). Ainsi la fonction *lireFichier* de l'exercice 1 est déclarée dans le fichier *io.h* et définie dans le fichier *io.c*.
Une flèche qui part d'un bloc 1 (programme principal ou module) vers un bloc 2 (module) signifie, qu'au moins, une fonction définie dans le bloc 1 appelle une fonction définie dans le bloc 2.
D'autre part, le programme principal et tous les modules ont besoin de connaître le type *Point* défini dans le fichier *point.h* (non représenté sur le graphique).
Enfin, le module *affichage* utilise la bibliothèque *XWindow*. Il faudra prendre en compte les options supplémentaires de la commande *gcc* pour compiler le fichier *affichage.c* et réaliser l'édition des liens (comme dans l'application *lissage*).
Ecrivez, sur la feuille de réponses fournie, le fichier *makefile* pour produire l'application *enveloppe*.

AP11
Corrigé du Contrôle Continu de Langage C

Exercice 1

io.c (extrait)

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include "point.h"
#include "io.h"

void lireFichier ( FILE *f, int *pNb, Point **pTabPoints ) {

  // il faut supprimer la variable locale pPoints

  // lecture du nombre de points

  fread ( pNb, sizeof(int), 1, f );

  // allocation dynamique du tableau de points

  if ( ( *pTabPoints = malloc ( *pNb * sizeof(Point) ) ) == NULL ) {
    fprintf ( stderr, "Problème allocation mémoire\n" );
    exit ( EXIT_FAILURE );
  }
  // lecture de l'ensemble de points

  if ( fread ( *pTabPoints, sizeof(Point), *pNb, f ) != *pNb ) {
    fprintf ( stderr, "Problème lecture fichier\n" );
    exit ( EXIT_FAILURE );
  }
  // il faut supprimer l'instruction return
}
```

enveloppe.c

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include "point.h"
#include "parcours.h"
#include "affichage.h"
#include "io.h"

int main ( int argc, char **argv ) {

  Point *tabPoints;
  int nbPoints;
  FILE *f;
```

enveloppe.c (suite)

```
  if ( argc != 2 ) {
    fprintf ( stderr, "usage : %s nomFichier\n", argv[0] );
    exit ( EXIT_FAILURE );
  }
  if( ( f = fopen ( argv[1], "rb" ) ) == NULL ) {
    fprintf ( stderr, "problème ouverture fichier\n" );
    exit ( EXIT_FAILURE );
  }
  // appel de la fonction lireFichier

  lireFichier ( f, &nbPoints, &tabPoints );

  // la suite du programme
  return EXIT_SUCCESS;
}
```

Exercice 2

makefile

```
OBJETS = enveloppe.o parcours.o pile.o geometrie.o io.o affichage.o

enveloppe : $(OBJETS)
        gcc -Wall -L/usr/X11R6/lib -lX11 $(OBJETS) -o enveloppe

enveloppe.o : parcours.h io.h affichage.h point.h enveloppe.c
        gcc -Wall -c enveloppe.c

parcours.o : parcours.h affichage.h pile.h geometrie.h point.h parcours.c
        gcc -Wall -c parcours.c

pile.o : pile.h point.h pile.c
        gcc -Wall -c pile.c

geometrie.o : geometrie.h point.h geometrie.c
        gcc -Wall -c geometrie.c

io.o : io.h point.h io.c
        gcc -Wall -c io.c

affichage.o : affichage.h point.h affichage.c
        gcc -Wall -I/usr/include/X11 -c affichage.c
```

AP11
Enoncé du Contrôle Final n°1
Vendredi 3 février 2006

Document autorisé : le polycopié distribué en cours **Durée** : 1h30

Exercice d'Algorithmique (sur 10 points)

Soient *n* et *d* deux naturels non nuls. Si *d* est un diviseur de *n* et s'il est premier avec *n* /*d*, alors *d* est un diviseur unitaire de *n*. Un nombre est unitairement parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs unitaires autres que lui-même.
On ne connaît que cinq nombres unitairement parfaits : 6, 60, 90, 87360 et $1{,}4582\ldots10^{23}$; on conjecture qu'ils sont en nombre fini.

Définissez en **langage algorithmique** la fonction *estNombreUnitairementParfait* qui prend un paramètre *nombre* de type naturel non nul et qui renvoie un booléen égal à VRAI si *nombre* est unitairement parfait, à FAUX sinon.
Adoptez impérativement une démarche descendante. Définissez également la fonction *principale* qui permettra de saisir un nombre, d'appeler la fonction *estNombreUnitairementParfait* et d'afficher de manière lisible le résultat.

Exercice de Langage C et Structures de Données (sur 10 points)

On considère deux listes linéaires triées *liste1* et *liste2*. Elles sont gérées par pointeurs et contiennent des valeurs entières sans doublon. Voici, pour rappel, la définition du type *Liste* en langage C :

```
typedef struct element { int valeur;
                         struct element *lien; } Element;

typedef Element *Liste;
```

Définissez en **langage C** la fonction **itérative** *intersectionListes* qui prend deux paramètres *liste1* et *liste2* de type *Liste* et qui renvoie un objet de type *Liste* : la liste qui contient les valeurs présentes simultanément dans *liste1* et *liste2*. Voici le prototype de cette fonction :

```
  // Intersection des deux listes : liste1 et liste2

Liste intersectionListes ( Liste liste1, Liste liste2 );
```

Pour ce faire, vous disposez des fonctions C dont les prototypes suivent :

```
  // Création d'une nouvelle liste vide

Liste nouvelleListe ( void );

  // Test si la liste est vide

Booleen estListeVide ( Liste liste );

  // Enlister un entier

Liste enlister ( Liste liste, int v );
```

AP11
Corrigé du Contrôle Final n°1

Exercice d'Algorithmique

Définition de la fonction *estNombreUnitairementParfait*

```
fonction estNombreUnitairementParfait ( nombre : NaturelNonNul ) : Booléen

    somme = 0 : Naturel

    pour diviseur = 1 : NaturelNonNul à nombre div 2
        si nombre mod diviseur = 0 et estDiviseurUnitaire ( nombre, diviseur ) alors
            somme ← somme + diviseur
        fsi
    fpour diviseur

    retourner ( somme = nombre )

ffct estNombreUnitairementParfait
```

Définition de la fonction *estDiviseurUnitaire*

```
fonction estDiviseurUnitaire ( n, d : NaturelNonNul ) : Booléen

    si pgcd ( n div d , d ) = 1 alors  // 2 nombres sont premiers entre eux si leur pgcd est égal à 1
        retourner VRAI
    fsi

    retourner FAUX

ffct estDiviseurUnitaire
```

Définition récursive de la fonction *pgcd*

```
fonction pgcd ( a, b : NaturelNonNul ) : NaturelNonNul

    r = a mod b : Naturel

    si r = 0 alors
        retourner b
    fsi

    retourner pgcd ( b, r )

ffct pgcd
```

Définition de la fonction *principale*

fonction principale ( ) : CodeRetour

```
    nombreAtester : NaturelNonNul

    afficher ( "Saisir un nombre ≥ 1 : " )
    saisir ( nombreAtester )

    afficher ( nombreAtester )
    si estNombreUnitairementParfait ( nombreAtester ) alors
        afficher ( " est " )
    sinon
        afficher ( " n'est pas " )
    fsi
    afficher ( "un nombre unitairement parfait" )
    allerAlaLigne ( )

    retourner OK
```

ffct principale

Exercice de Langage C et Structures de Données

```
  // Intersection des deux listes : liste1 et liste2

Liste intersectionListes ( Liste liste1, Liste liste2 ) {

  Liste liste = nouvelleListe ( );
  Liste ptrCourant1 = liste1, ptrCourant2 = liste2;

  while ( ( ptrCourant1 != NULL ) && ( ptrCourant2 != NULL ) ) {

    while ( ( ptrCourant1 != NULL ) && ( ptrCourant2 != NULL ) &&
            ( ptrCourant1->valeur != ptrCourant2->valeur) ) {

      if ( ptrCourant1->valeur < ptrCourant2->valeur )
        ptrCourant1 = ptrCourant1->lien;
      else
        ptrCourant2 = ptrCourant2->lien;
    }

    if ( ptrCourant1 != NULL &&  ptrCourant2 != NULL &&
         ptrCourant1->valeur == ptrCourant2->valeur ) {

      liste = enlister ( liste, ptrCourant1->valeur );
      ptrCourant1 = ptrCourant1->lien;
      ptrCourant2 = ptrCourant2->lien;
    }
  }
  return liste;
}
```

AP11 - Enoncé du Contrôle Final n°1
Lundi 29 Janvier 2007

Durée : 1 heure 30
Document autorisé : le polycopié distribué en cours

Exercice d'algorithmique (sur 10 points)

Soit une matrice d'entiers notée *matrice* définie par :

constante N = 3, M = 4 // par exemple

type Matrice = **tableau**[1 .. N][1 .. M] **de** Entier

matrice : Matrice

Un couple d'indices (*l* , *c*) représente un min-max de cette matrice si l'élément *matrice* [*l*][*c*] est un minimum de la ligne *l* et un maximum de la colonne *c*.
La méthode qui permet de déterminer les couples min-max d'une matrice (s'il en existe) consiste pour chaque ligne *l* à :

- déterminer les minima de cette ligne ;
- pour chacun de ces minima d'indice *c*, vérifier si *matrice* [*l*][*c*] est un maximum pour sa colonne.

Définir **en langage algorithmique** la procédure *afficherMinMax* qui prend en donnée un paramètre *matrice* de type *Matrice* et qui affiche dans la fenêtre *shell* tous les couples min-max de cette matrice. Cet affichage devra être réalisé comme le montre l'exemple suivant :

```
Le couple (2,3) de valeur 7 est un min-max
```

Quelques rappels sur les aspects méthodologiques qui vous ont été présentés durant ces cinq derniers mois :

- l'approche descendante ; votre algorithme doit être constitué de plusieurs fonctions/procédures et cet exercice s'y prête fort bien ;
- tout objet utilisé doit être préalablement défini ;
- le choix judicieux des identificateurs de fonction, procédure et variable permettra d'améliorer la lisibilité de votre algorithme ;
- il en va de même de l'indentation de votre texte.

Exercice de langage C et structures de données (sur 10 points)

La structure de liste linéaire permet de représenter un graphe comme il est indiqué sur le transparent 3.7 du chapitre 11 de votre polycopié. Vous trouverez ci-dessous le même exemple avec une numérotation des sommets du graphe qui commence à zéro (à la C).
Voici les définitions de types, en langage C, qui permettent de représenter un graphe par ses listes de successeurs gérées par pointeurs :

- pour les différents successeurs d'un sommet donné (listes représentées horizontalement sur le dessin). Ces listes peuvent être éventuellement vides (comme pour le sommet de numéro 2 sur l'exemple) ;

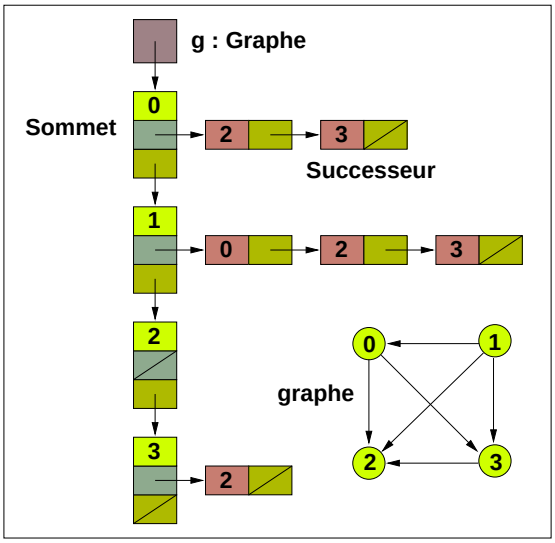
```
// définition des types Successeur et ListeSuccesseurs;

typedef struct successeur { int numero;
                            struct successeur *lien; } Successeur;
```

```
typedef Successeur *ListeSuccesseurs;
```

– pour les différents sommets du graphe (liste représentée verticalement sur le dessin).

```
// définition des types Sommet et Graphe

typedef struct sommet { int numero;
                        ListeSuccesseurs successeurs;
                        struct sommet *lien; } Sommet;

typedef Sommet *Graphe;
```

Ces listes sont triées selon les numéros de sommet croissants. Cela permet un parcours partiel de la liste de sommets quand on recherche un sommet donné et de même, un parcours partiel d'une liste de successeurs quand on veut vérifier si un sommet est successeur d'un autre sommet.



Vous devez définir, **en langage C**, la fonction *afficherSuccesseurs* qui prend un paramètre *g* de type *Graphe* et un paramètre *num* de type *int*. Cette fonction affichera dans la fenêtre *shell* les successeurs du sommet de numéro *num* comme le montre les deux exemples suivants :

– **`Successeur(s) de 0 : 2 3`**
– **`Successeur(s) de 2 :`**

Voici le prototype de cette fonction :

```
void afficherSuccesseurs ( Graphe g, int num );
```

Vous disposez de la fonction C *estGrapheVide* qui prend un paramètre *g* de type *Graphe* et qui renvoie la valeur *VRAI* si *g* contient la valeur *NULL*, *FAUX* sinon. Voici son prototype :

```
Booleen estGrapheVide ( Graphe g );
```

Quelques conseils :

– adoptez une démarche descendante : la fonction C *afficherSuccesseurs* parcourera partiellement la liste de sommets car elle est triée ; une autre fonction C parcourera totalement la liste de successeurs ;
– préférez une implémentation récursive de ces deux fonctions ;
– il y a très peu de C à écrire. Vérifiez soigneusement la syntaxe de votre source.

AP11
Corrigé du Contrôle Final n°1

Exercice 1

```
constante N = 3, M = 4 // par exemple

type Matrice = tableau[1 .. N][1 .. M] de Entier
```

Définition de la procédure *affichierMinMax*

```
procédure afficherMinMax ( donnée matrice : Matrice)

    minLigne : Entier // pour mémoriser la valeur minimum de la ligne

    // balayage des lignes

    pour ligne = 1 : Naturel à N

        // recherche du minimum sur la ligne

        minLigne ← minimumLigne ( matrice, ligne )

        // parcours des minima d'une ligne

        pour colonne = 1 : Naturel à M
            si matrice [ ligne ] [ colonne ] = minLigne alors
                si estMaximumColonne ( matrice, ligne, colonne ) alors

                    afficher ( "Le couple ( ", ligne, " , ", colonne, " ) de valeur " )
                    afficher ( matrice [ ligne ] [ colonne ], " est un min-max" )
                    allerAlaLigne ( )

                fsi
            fsi
        fpour colonne

    fpour ligne

fproc afficherMinMax
```

Définition de la fonction *minimumLigne*

```
fonction minimumLigne ( matrice : Matrice, ligne : Naturel ) : Entier

    minimum = matrice [ ligne ] [ 1 ] : Entier

    pour colonne = 2 : Naturel à M
        si matrice [ ligne ] [ colonne ] < minimum alors
            minimum ← matrice [ ligne ] [ colonne ]
        fsi
    fpour colonne
```

retourner minimum

ffct minimumLigne

Définition de la fonction *estMaximumColonne*

fonction estMaximumColonne (matrice : Matrice, ligne, colonne : Naturel) : Booléen

pour l = 1 : Naturel **à** N
si matrice [l] [colonne] > matrice [ligne] [colonne] **alors**
retourner FAUX
fsi
fpour l

retourner VRAI

ffct minimumLigne

Exercice 2

Définition de la fonction C *afficherSuccesseurs*

```
void afficherSuccesseurs ( Graphe g, int num ) {

  if ( !estGrapheVide ( g ) && g->numero < num )
    afficherSuccesseurs ( g->lien, num );
  else
    if ( !estGrapheVide ( g ) && g->numero == num ) {
      printf ( "Successeur(s) de %d : ", num );
      afficherListe ( g->successeurs );
    }
}
```

Définition de la fonction C, modifiée *static*, *afficherListe*

```
static void afficherListe ( ListeSuccesseurs liste ) {

  if ( liste != NULL ) {
    printf ( "%d ", liste->numero );
    afficherListe ( liste->lien );
  }
  else
    printf ( "\n" );
}
```

```
        colonne ← colonne - 1

      fsi
  ftq
```

fproc remplirCarré

Exercice 2

Définition de la fonction *minimum* appelée par les deux versions de la fonction *minListe*

```
int mininum ( int a, int b ) {

  if ( a < b )
    return a;
  return b;
}
```

Définition de la fonction C itérative *minListe*

```
int minListe ( Liste l ) {

  int min = l->valeur;  // il y a au moins un élément
                        // dans la liste
  l = l->lien;
  while ( l != NULL ) {
    min = minimum ( l->valeur, min );
    l = l->lien;
  }
  return min;
}
```

Définition de la fonction C récursive *minListe*

```
int minListe ( Liste l ) {

  if ( l->lien == NULL) // il y a au moins un élément
    return l->valeur;   // dans la liste
  else
    return minimum ( l->valeur, minListe ( l->lien ) );
}
```

AP11
Enoncé du Contrôle Final n°2
Vendredi 21 avril 2006

Document autorisé : le polycopié distribué en cours **Durée** : 1h30

Exercice d'Algorithmique (sur 10 points)

Pour mémoire, les coefficients binomiaux sont définis par :

$C_n^n = C_n^0 = 1$ et $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ si $0 < p < n$, n étant un naturel non nul et p étant un naturel

Définissez en **langage algorithmique** une procédure *développer* qui prend en donnée un paramètre *n* de type NaturelNonNul et qui affiche le développement de l'expression $(x + y)^n$ dont on rappelle que c'est la somme des termes $C_n^p x^{n-p} y^p$, $0 \leq p \leq n$.
Vous devez obligatoirement adopter une démarche descendante ; i. e. définir une fonction et plusieurs procédures. Prenez comme repère, l'algorithme qui affiche l'histogramme correspondant à un tableau d'entiers. On ne doit pas trouver d'appel de l'action *afficher* dans la définition de la procédure *développer* elle-même.
De plus, soignez particulièrement l'affichage. x^n devra être affiché sous la forme **x^n**. La présence d'un caractère espace peut être représenté par le symbole '␣'. L'algorithme, s'il était implémenté, devrait afficher dans la fenêtre *shell* :

- pour *n* = 1 : **`x + y`**
- pour *n* = 2 : **`x^2 + 2 x y + y^2`**
- pour *n* = 3 : **`x^3 + 3 x^2 y + 3 x y^2 + y^3`**

Enfin, **vous n'avez pas à écrire** la fonction *principale*.

Exercice de Langage C et Structures de Données (sur 10 points)

On considère une liste linéaire *liste* non nécessairement triée, éventuellement avec doublon. Cette liste est gérée par pointeurs et contient des valeurs entières. Voici, pour rappel, la définition du type *Liste* en langage C :

```
typedef struct element { int valeur;
                         struct element *lien; } Element;

typedef Element *Liste;
```

Vous allez vous intéresser au « vidage » de cette liste ; i. e. retirer ses éléments un à un à l'aide d'une désallocation mémoire.
Dans un premier temps, définissez en **langage C** la fonction **itérative** *viderListe* qui prend un paramètre *liste* de type *Liste* et qui renvoie un objet de type *Liste* correspondant à une liste vide. Voici le prototype de cette fonction :

```
Liste viderListe ( Liste liste ); // style fonctionnel
```

Redéfinissez ensuite, toujours en **langage C**, la fonction **récursive** *viderListe* typée *void* qui prend un paramètre *pListe* de type *Liste* *. Voici le prototype de cette fonction :

```
void viderListe ( Liste *pListe ); // style procédurale
```

Vous ne disposez que de la fonction C *estListeVide* dont voici le prototype :

```
Booleen estListeVide ( Liste liste );
```

En aucun cas, n'utilisez la fonction C *delister*. D'ailleurs, vous ne connaissez pas les valeurs stockées dans cette liste.

AP11 - Enoncé du Contrôle Final nº2
Mercredi 4 avril 2007

Durée : 1 heure 30
Document autorisé : le polycopié distribué en cours

Exercice d'algorithmique (sur 10 points)

Un carré magique est un tableau de *N* lignes et *N* colonnes. Chaque case de ce tableau doit contenir un nombre différent allant de 1 à N^2. La somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales doit être la même.
Il existe une méthode prouvée pour construire un carré magique d'ordre impair (*N* impair), la voici :

- les nombres sont placés par ordre croissant (de 1 à N^2) ;
- le milieu de la dernière colonne est la première position de placement (le nombre 1) ;
- on place les N^2-1 valeurs restantes comme suit :
  - on cherche à placer la valeur suivante dans la case en dessous à droite de la position courante ;
  - si la position courante est sur la dernière ligne ou/et sur la dernière colonne, on juxtapose le même tableau de telle sorte qu'il existe toujours une case située en dessous à droite de la position courante ;
  - si cette case est vide, la valeur suivante y est placée ;
  - sinon la case à gauche de la position courante est nécessairement vide et on y place la valeur suivante.

Prenons comme exemple la création d'un carré magique d'ordre 5. Voici son contenu après placement des dix premières valeurs et après placement des 25 valeurs :

	10	4		
		6	5	
			7	1
2				8
9	3			

11	10	4	23	17
18	12	6	5	24
25	19	13	7	1
2	21	20	14	8
9	3	22	16	15

Vous pouvez vérifier que la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales est égale à 65.

Voici la définition du type *Carré* :

constante N = 5 // obligatoirement impaire

type Carré = **tableau**[1 .. N][1 .. N] **de** Naturel

Vous devez définir, **en langage algorithmique**, la procédure *construireCarré* qui prend un paramètre en résultat *carréMagique* de type *Carré* et qui insert dans ce carré les valeurs allant de 1 à N^2 selon la méthode décrite ci-dessus.
Une initialisation du carré avec une valeur appropriée peut faciliter l'expression de l'algorithme.

Quelques rappels sur les aspects méthodologiques qui vous ont été présentés durant le module :

- l'approche descendante ;
- la cohérence algorithmique : l'appel d'une fonction/procédure doit être en cohérence avec sa définition ;
- tout objet utilisé doit être préalablement défini ; un objet n'est visible que dans dans l'entité (fonction ou procédure) où il a été défini ;

– le choix judicieux des identificateurs de fonction, procédure et variable permettra d'améliorer la lisibilité de votre algorithme ;
– il en va de même de l'indentation de votre texte.

Exercice de langage C et structures de données (sur 10 points)

On considère une liste linéaire **non triée** d'entiers gérée par pointeurs. Cette liste peut éventuellement contenir des doublons.
Voici un rappel en langage C de la définition du type *Liste* contenue dans le fichier *liste.h* :

```
typedef struct element { int valeur;
                         struct element *lien; } Element;

typedef Element *Liste;
```

Vous devez déterminer un élément de valeur **minimum** dans cette liste. On supposera que la liste n'est pas vide ; elle contient au moins un élément. Cela signifie que dans l'appelant, il y aura un test préalable (utilisant la fonction *estListeVide*) avant l'appel de la fonction *minListe*. Mais vous n'avez pas à écrire cette séquence d'appel.

Vous devez définir, **en langage C**, deux versions de la fonction C *minListe* :

– une version **itérative**
– une version **récursive**

Ces deux versions ont le même prototype :

```
int minListe ( Liste l );
```

La définition d'une fonction C renvoyant le minimum de deux entiers et utilisable par les deux versions de la fonction *minListe* serait la bienvenue.

AP11
Corrigé du Contrôle Final n°2

Exercice 1

constante N = 5 // obligatoirement impaire

type Carré = **tableau**[1 .. N][1 .. N] **de** Naturel

Définition de la procédure *construireCarré*

procédure construireCarré (**résultat** carréMagique : Carré)

```
    initialiserCarré ( carréMagique )
    remplirCarré ( carréMagique )
```

fproc construireCarré

Définition de la procédure *initialiserCarré*

constante VIDE = 0 // par convention pour distinguer les cases vides des autres

procédure initialiserCarré (**résultat** carré : Carré)

```
    pour ligne = 1 : Naturel à N
        pour colonne = 1 : Naturel à N
          carré [ ligne ] [ colonne ] ← VIDE
        fpour colonne
    fpour ligne
```

fproc initialiserCarré

Définition de la la procédure *remplirCarré*

procédure remplirCarré (**donnée-résultat** carré : Carré)

```
    ligne = N div 2 + 1, colonne = N : Naturel     // position courante
    nouvelleLigne, nouvelleColonne : Naturel       // position nouvelle possible
    valeur = 1, valeurMax = N × N : Naturel        // valeurs courante et maximum

    tant que valeur ≤ valeurMax faire              // boucle de placement

        carré [ ligne ] [ colonne ] ← valeur
        valeur ← valeur + 1

        nouvelleLigne ← ( ligne mod N ) + 1
        nouvelleColonne ← ( colonne mod N ) + 1

        si carré [ nouvelleLigne ] [ nouvelleColonne ] = VIDE alors

          ligne ← nouvelleLigne
          colonne ← nouvelleColonne

        sinon
```

```
        colonne ← colonne - 1

      fsi
  ftq
```

fproc remplirCarré

Exercice 2

Définition de la fonction *minimum* appelée par les deux versions de la fonction *minListe*

```
int mininum ( int a, int b ) {

  if ( a < b )
    return a;
  return b;
}
```

Définition de la fonction C itérative *minListe*

```
int minListe ( Liste l ) {

  int min = l->valeur;  // il y a au moins un élément
                        // dans la liste
  l = l->lien;
  while ( l != NULL ) {
    min = minimum ( l->valeur, min );
    l = l->lien;
  }
  return min;
}
```

Définition de la fonction C récursive *minListe*

```
int minListe ( Liste l ) {

  if ( l->lien == NULL) // il y a au moins un élément
    return l->valeur;   // dans la liste
  else
    return minimum ( l->valeur, minListe ( l->lien ) );
}
```

Module AM12

Corrigé du contrôle

19/03/2007

1 Questions

1) La valeur décimale -3 est représentée en hexadécimal sur 1 octet par :
FD

2) Quelle est la taille en octets d'un fichier son de 3mn20s échantillonné à 80KHz avec des mots de 16 bits ?
3mn20s=200s donc 80000x200x2 = 32 Moctets

3) Le temps d'accès actuel à une mémoire RAM est ? (Ordre de grandeur)
autour de 10 ns

4) Pourquoi faut-il "rafraîchir" les mémoires dynamiques ?
Le point mémoire est réalisé par un condensateur : il y a donc un courant de fuite et perte de l'information qu'il faut réécrire

5) Quelle est la largeur minimale du bus d'adresses d'un microprocesseur pour accéder à 2 boitiers mémoire RAM de 1Mo chacun ?
1M = 2^{20} -> 21 lignes

6) Qu'est-ce que le compteur ordinal ?
Registre qui pointe à chaque instant sur la prochaine instruction à exécuter

7) Qu'est-ce que l'UAL ?
Unité Arithmétique et Logique d'un processeur pour des calculs en Entier et opérations logiques

8) Quels sont les principaux composants(circuits intégrés) d'une carte mère
Microprocesseur, Chipset, Mémoire(ROM et RAM)

9) Rôle du préprocesseur ?
Traitement du source avant la compilation : inclusion de fichiers .h, substitution

10) Quelle est la commande utilisée pour obtenir l'exécutable **hello** à partir de **hello.c** et d'une bibliothèque statique **libnewlib.a** située dans le répertoire **../malib** ?

gcc -static -o hello hello.c -L../malib -lnewlib

Module AM12

Corrigé du contrôle

19/03/2007

1 Questions

1) Quelle est la valeur décimale correspondant à **8C** en hexadécimal ?
140

2) Quelle est la taille en octets d'un fichier son de 1mn40s échantillonné à 40KHz avec des mots de 16 bits ?
1mn40s = 100s donc 40000x100x2 = 8Moctets

3) Qu'est-ce que le temps d'accès à une mémoire ?
Délai écoulé entre la présentation d'une adresse valide et le délivrance de la donnée

4) Un composant mémoire stocke 1 Moctets. Combien dispose-t-il de lignes d'adresses ?
20 lignes en théorie, 10 en pratique(rangée puis colonne)

5) Qu'est-ce que le registre d'état ?
Les indicateurs de ce registre décrivent l'état du processeur après chaque instruction

6) Quelles sont les étapes de traitement d'une instruction par un microprocesseur ?
Fetch, Decode, Execution, Write Back

7) Quels sont les bus d'un microprocesseur ?
Bus d'adresses, bus de données et bus de contrôle

8) Quel est le rôle du chipset sur la carte mère
Interface entre le processeur et Mémoire-périphériques, fonctions intégrées (timer, contrôle d'IT)

9) Rôle de l'éditeur de liens
Concaténation des .o, résolution des références externes pour

obtenir l'exécutable

10) Quelle est la commande pour obtenir **hello.o** à partir de **hello.c** contenant # **include "hello.h"** et hello.h situé dans le répertoire **../include** ?

gcc -I../include -c hello.c

Module AM12

Corrigé du contrôle

20/03/2007

1 Questions

1) Quel est le saut en nombre d'octets pour aller de l'adresse 8BC88888 à l'adresse 8BC88897 ?

15

2) Un nombre 16 bits est noté A7E2 sur une machine Big endian ; quelle est sa représentation sur une machine Little endian ?

E2A7

3) Quelle est la différence entre une DRAM et une SRAM ?

La façon dont est réalisée la mémorisation de l'information(bascule électronique ou condensateur)

4) Quelle est l'utilisation de la mémoire Flash sur la carte mère d'un PC ?

La ROM BIOS

5) Qu'est-ce que le registre d'état ?

Les indicateurs de ce registre décrivent l'état du processeur après chaque instruction

6) Quelle doit être la taille minimale du bus d'adresses d'un processeur 32 bits pour accéder à une mémoire 32 Mo

32 M $= 2^{25}$ **donc 25 lignes**

7) Quelles sont les étapes de traitement d'une instruction par un microprocesseur ?

Fetch, Decode, Execution, Write Back

8) Quel bus relie un disque dur à la carte mère

Bus IDE ou SCSI

9) **/tmp/c1Yi1ULC.o(.text+0x26) :indefined reference to 'affi'**. Ce message peut être affiché lors de quelle étape de gcc ?

Edition des liens

10) Quelle est la commande pour obtenir **hello.o** à partir de **hello.c** contenant # **include "hello.h"** et hello.h situé dans le répertoire **../hellod/include** ?
gcc -I../hellod/include -c hello.c

Module AM12
CONTRÔLE sans Document

Nom:

Prénom:

Groupe:

Questions

1) Quel est le rôle du compteur ordinal?
■ **Registre contenant l'adresse de la prochaine instruction à traiter**

2) Comment mesure-t-on les performances d'un ordinateur?
■ **Utilisation de benchmarks**

3) Quel est le nombre de transistors que permet de graver la technologie actuelle sur une puce de silicium?
■ **1 Milliard**

4) Qu'est-ce que le mécanisme de pipeline dans un microprocesseur?
■ **L'exécution d'une instruction comporte plusieurs étapes. Le pipeline est un pseudo parallélisme interne qui permet le traitement d'une étape d'une instruction pendant le traitement d'une autre étape d'une autre instruction.**

5) Qu'est-ce qu'un processeur superscalaire?
■ **C'est un processeur pouvant exécuter plusieurs instructions en parallèle grâce à une duplication des ressources**.

6) Le bon fonctionnement d'une mémoire cache s'appuie sur quel principe?
■ **Le principe de localité spatiale et temporelle**

7) Quelles sont les caractéristiques principales d'un processus?
■ **Les pid et ppid,l'état, le terminal de rattachement, la priorité, l'environnement, etc**.

8) Combien de temps vous faut-il pour recopier le contenu d'un disque dur externe de 20Go via le port USB V2.0: 10s, 8mn ou 1h10mn?
■ **Environ 8mn pour un débit de 480Mbits/s**

9) Quel est l'avantage d'une bibliothèque dynamique par rapport à une bibliothèque statique?
■ **Réduction de la taille du fichier exécutable et de la place occupée en mémoire(partage)**

10) Donnez le schéma de principe d'un microordinateur?

■ **Processeur, mémoire(ROM, RAM) et composant d'E/S reliés par les bus d'adresses, données et contrôle**.

Module AM12
CONTRÔLE sans Document

Nom:

Prénom:

Groupe:

Questions

1) Quels sont les bus d'un microprocesseur?
■ **Bus d'adresses, de données et de contrôle**

2) Quel doit être le nombre de lignes minimal du bus d'adresses d'un processeur 32 bits pour accéder à une mémoire de 8 Moctets?
■ **8M=** 2^{23} **donc 23 lignes**

3) Citez des types d'architecture de mémoire cache?
■ **Cache associatif, cache direct ou cache K-way associatif**

4) Le gain optimal k pour un pipeline à k étages n'est pas toujours atteint, pourquoi?
■ **Parce qu'il existe des dépendances entre les instructions (dépendances de données, de ressources, de contrôle**

5) Qu'est-ce que l'hyperthreading?
■ **Architecture d'un processeur (Intel) simulant l'existence de deux processeurs**.

6) Qu'est-ce que la loi de Moore?
■ **La loi d'évolution d'intégration (le double tous les 18 mois) des transistors sur une puce de silicium**

7) Qu'est-ce qu'un processus swappé?
■ **L'image mémoire d'un processus mis en attente est recopiée sur disque**.

8) Combien cette ligne de programme en C permet-elle de créer de processus?: **for (k=0;k<2;k++) rc=fork();**
■ **3 processus en plus du processus père**

9) Quel est le débit du port USB V2.0
■ **480 Mbits/s**

10) Donnez le schéma de principe d'un microordinateur?

■ **Processeur, mémoire(ROM, RAM) et composant d'E/S reliés par les bus d'adresses, données et contrôle**.

INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
CONTRÔLE des CONNAISSANCES

Module: Architecture matérielle et logicielle — Code: AM12
Durée: 1H30 — Date: 24 Mai 2007
Sans Document — Coordonnateur: C.SCHÜLLER

1) **Microordinateur**

-1-1 Donnez le schéma (et commentaires) de l'architecture de principe d'un microordinateur.

2) **Microprocesseur**

-2-1 Rappeler le principe de fonctionnement d'un processeur (Registres,bus, déroulement d'une instruction).

-2-2 Si ce processeur dispose d'un bus d'adresses 32 bits, combien peut-il gérer d'octets en mémoire?

-2-3 Qu'est-ce qu'un processeur superscalaire?

-2-4 Qu'est-ce que la technique de pipeline?

-2-5 L'accès à la mémoire est amélioré si on utilise de la mémoire cache. Quels sont les principes mis en œuvre dans cette technique de cache.

3) **Chaîne de développement**

-3-1) Rappelez la chaîne de production d'un programme exécutable en C sous Linux. (=Les étapes entre le fichier source et le programme exécutable?)

On dispose maintenant d'un programme en C et d'un programme en Assembleur pour calculer la moyenne de 2 nombres.

Fichier principal.c

```
#include <stdio.h>
extern int moy(int, int);
main()
{
 int j=8;
 int k=24;
 printf("Moyenne de %d et %d = %d\n",j,k,moy(j,k));
 printf("Fin du programme");



}
```

Fichier lamoyenne.s

```
.file "lamoyenne.s"
.text
.global moy
moy:
pushl %ebp
movl %esp, %ebp
movl 8(%ebp), %eax
.....
.....
.....
pop %ebp
ret
```

-3-2) Donnez l'état de la pile d'exécution après l'instruction pushl.

-3-3) Ajoutez les instructions manquantes (en pointillés) dans le programme en Assembleur.

-3-4) Quelles sont les commandes à réaliser pour obtenir un programme exécutable?

-3-5) La commande qu'on utilise renvoie:

/tmp/cc4Vga70.o: In function 'main':
/tmp/cc4Vga70.o(.text+0x1e): undefined reference to 'moy'
collect2: ld returned 1 exit status

D'où vient le problème?

-3-6) Finalement on obtient un programme exécutable mais son exécution ne donne pas le résultat escompté. Comment essayer de résoudre le problème?

-3-7) La fonction **moy** donne satisfaction et pour la réutiliser facilement on l'insère dans une bibliothèque **libmalib.a**. Donnez la différence entre une bibliothèque statique et une bibliothèque dynamique.

-3-8) Donnez la commande pour obtenir l'exécutable **principal** si la bibliothèque se trouve dans le répertoire courant.

4) **Processus**

On lance l'exécution du programme **princ** qui devient alors un processus pour Linux.

-4-1 Rappelez les caractéristiques d'un processus.

-4-2 Donnez plusieurs commandes pour obtenir des informations sur un processus?

-4-3 Comment créer un processus dans un programme en C sous Linux?

5) **Périphériques**

À partir du microordinateur sous Linux, on veut maintenant piloter une carte à LEDs connectée sur le port parallèle comme dans la Figure 1.

Pour allumer les Leds, il suffit d'envoyer la configuration binaire choisie sur le

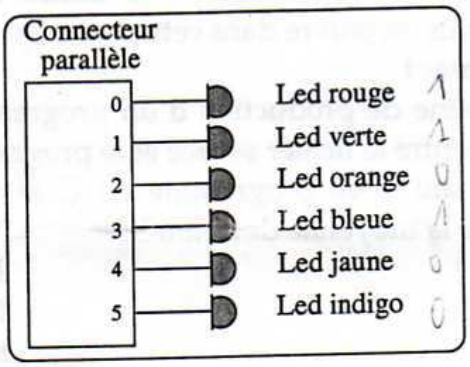


Figure 1: *Leds*

port parallèle de numéro 0x378.(Un 1 allume la LED, un 0 l'éteint)

On veut uniquement allumer les leds rouge, verte et bleue:

-5-1 Donner la notation hexadécimale de l'octet à envoyer sur le port.

Le programme suivant permet d'allumer des leds en envoyant un octet donné sur le port choisi:

```
int main()
    { unsigned char valeur=03;
    outb(valeur,0x378); //0x378 est le numéro du port
    return 0;}
```

Vous compilez sans problème mais il y une erreur en exécution.

-5-2 Quelle peut être la raison du problème?

On dispose maintenant d'un pilote de périphérique désigné par le fichier **/dev/feu** qui accepte d'allumer les LEDs en fonction de l'octet qu'on lui envoie.

-5-3 Qu'est-ce qu'un pilote de périphérique et comment peut-on l'utiliser?

UV Réseaux

IT - RD - FA

Caliente

Nom/ Name:	*Prénom/first name :*	*Note :*

QCM-1
Introduction au monde de la télécommunication

Le 6 janvier 2006	**Sans documents**	Durée : 15 min
January 6, 2006	***Without documents***	*Time : 15 min*

Nota : Les questions peuvent avoir plusieurs réponses :
Foot-note: questions may have several responses.

1. Un réseau de télécommunications est composé:

A telecommunication network is based on:

- ☐ De commutateurs / *switches*
- ☐ D'organismes de normalisation / standardisation bodies
- ☐ D'artères de transmission / *transmission links*
- ☐ De terminaux / *terminal equipment*
- ☐ *D'opérateurs de télécommunications / telecommunications operators*

2. La topologie entièrement maillée 2 à 2 permet de raccorder entre eux:

The meshed 2-2 topology allows to connect between them :

- ☐ un grand nombre d'équipements / *a great number of equipment*
- ☐ un petit nombre d'équipements / *a small number of equipment*
- ☐ se trouve dans la partie « cœur » de réseau / *is located in the « core » network*
- ☐ se trouve dans la partie périphérique du réseau / *is located in the « access » network*

3. La topologie ou architecture de la boucle locale est basée sur:

The topology or architecture of the local loop is based on:

- ☐ une architecture en bus / *a bus topology*
- ☐ une architecture en anneau / *a ring topology*
- ☐ une architecture en étoile / *a star topology*
- ☐ une architecture maillée / *a meshed topology*

4. Le réseau de l'opérateur historique Français « France Télécom » est défini sur:

The network of the historical French operator France Telecom is based on:

- ☐ une structure hiérarchique à 2 niveaux / a 2 level hierarchical structure
- ☐ une structure hiérarchique à 3 niveaux / a 3 level hierarchical structure
- ☐ une structure hiérarchique à 4 niveaux / a 4 level hierarchical structure

5. Le Commutateur à Autonomie d'Acheminement CAA est :

The Local Switch LS is

- ☐ capable d'analyser le N° de téléphone du correspondant distant / *able to analyse the phone number of the called subscriber*
- ☐ incapable d'analyser le N° de téléphone du correspondant distant / *unable to analyse the phone number of the called subscriber*

6. Citez 2 opérateurs alternatifs français :

Give 2 French new alternative operators:

……
……

7. La majorité des abonnés particuliers est raccordée grâce à:

Most of the home subscribers are connected thanks to:

- ☐ Une fibre optique / *an optical fibre*
- ☐ Un câble coaxial / *a coaxial cable*
- ☐ Une paire de cuivre / *a copper pair*
- ☐ Un lien radio / *a radio link*

8. La bande passante téléphonique normalisée est définie par :

The normalised telephone bandwidth is defined by:

- ☐ [300 – 3400 Hz]
- ☐ [0 – 4 KHz]
- ☐ [0 – quelques /*several* MHz]

9. un signal numérique transmis à distance:

A digital signal remotely transmitted:

- ☐ se déforme moins qu'un signal analogique / *is less distorted than an analog signal*
- ☐ se déforme autant qu'un signal analogique / *is distorted like an analog signal*
- ☐ se déforme plus qu'un signal analogique / *is more distorted than an analog signal*

10. Citez plusieurs solutions alternatives possibles dans le réseau d'accès :

Give several possible alternative solutions in the access network

……
……
……
……
……
……

FINI / *THE END*

CORRECTION:

1. Un réseau de télécommunications est composé:

A telecommunication network is based on:

- ■ De commutateurs / *switches*
- □ D'organismes de normalisation / standardisation bodies
- ■ D'artères de transmission / *transmission links*
- ■ De terminaux / *terminal equipment*
- □ *D'opérateurs de télécommunications / telecommunications operators*

2. La topologie entièrement maillée 2 à 2 permet de raccorder entre eux:

The meshed 2-2 topology allows to connect between them :

- □ un grand nombre d'équipements / *a great number of equipment*
- ■ un petit nombre d'équipements / *a small number of equipment*
- ■ se trouve dans la partie « cœur » de réseau / *is located in the « core » network*
- □ se trouve dans la partie périphérique du réseau / *is located in the « access » network*

3. La topologie ou architecture de la boucle locale est basée sur:

The topology or architecture of the local loop is based on:

- □ une architecture en bus / *a bus topology*
- □ une architecture en anneau / *a ring topology*
- ■ une architecture en étoile / *a star topology*
- □ une architecture maillée / *a meshed topology*

4. Le réseau de l'opérateur historique Français « France Télécom » est défini sur:

The network of the historical French operator France Telecom is based on:

- □ une structure hiérarchique à 2 niveaux / a 2 level hierarchical structure
- □ une structure hiérarchique à 3 niveaux / a 3 level hierarchical structure
- ■ une structure hiérarchique à 4 niveaux / a 4 level hierarchical structure

5. Le Commutateur à Autonomie d'Acheminement CAA est :

The Local Switch LS is

- ■ capable d'analyser le N° de téléphone du correspondant distant / *able to analyse the phone number of the called subscriber*
- □ incapable d'analyser le N° de téléphone du correspondant distant / *unable to analyse the phone number of the called subscriber*

6. Citez 2 opérateurs alternatifs français :

Give 2 French new alternative operators:

Groupe Cégétel (fusion de Télécom Développement (7) & LDCom (9)), Télé 2

7. La majorité des abonnés particuliers est raccordée grâce à:

Most of the home subscribers are connected thanks to:

- ☐ Une fibre optique / *an optical fibre*
- ☐ Un câble coaxial / *a coaxial cable*
- ■ Une paire de cuivre / *a copper pair*
- ☐ Un lien radio / *a radio link*

8. La bande passante téléphonique normalisée est définie par :

The normalised telephone bandwidth is defined by:

- ■ [300 – 3400 Hz]
- ■ [0 – 4 KHz]
- ☐ [0 – quelques /*several* MHz]

9. un signal numérique transmis à distance:

A digital signal remotely transmitted:

- ☐ se déforme moins qu'un signal analogique / *is less distorted than an analog signal*
- ■ se déforme autant qu'un signal analogique / *is distorted like an analog signal*
- ☐ se déforme plus qu'un signal analogique / *is more distorted than an analog signal*

10. Citez plusieurs solutions alternatives possibles dans le réseau d'accès :

Give several possible alternative solutions in the access network

BLR – WIMAX – WIFI / *WLL (Wireless Local Loop)*

Satellite pour certains pays, certaines régions du monde (Mexique par exemple)/ *Satellite for certain countries, certain areas in the world (Mexico for example)*

Câble/ *cable*

CPL / *Power line*

FO (FITL: Fiber Into The Loop) avec toute les déclinaisons de FTTx (voir fin cours transmission) / *Optical fibre with all FTTx known (see at the end of the lesson « Transmission »*

Dégroupage (accès par la location à la paire de cuivre de FT) / *Unbundling (rental of the copper pair)*

FINI / *THE END*

Nom:	*Prénom:*	*Note:*

QCM-1
Introduction au monde de la télécommunication

Le 29 Novembre 2006	**Sans documents**	Durée : 15 min environ

Nota : Les questions peuvent avoir plusieurs réponses:

1. Pouvez-vous citer quelques organismes de normalisation ?

.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Le Réseau Téléphonique Commuté est un :
- ☐ WAN
- ☐ MAN
- ☐ LAN
- ☐ CAN

3. Combien y a–t-il de liens entre 5 équipements réseaux maillés 2 à 2 ?
- ☐ 5 liens
- ☐ 10 liens
- ☐ 15 liens
- ☐ 20 liens

4. L'architecture d'un réseau de télécommunications définit :
- ☐ Le nombre d'équipements terminaux qui composent ce réseau
- ☐ Le nombre de commutateurs qui composent ce réseau
- ☐ Le nombre de liens qui interconnectent les équipements réseau
- ☐ La méthode d'interconnexion des équipements réseau

5. Le réseau de l'opérateur historique France Télécom est défini :
- ☐ Sur 3 niveaux hiérarchiques
- ☐ Sur 4 niveaux hiérarchiques
- ☐ Sur 2 niveaux de transit + 2 niveaux d'accès
- ☐ Sur 1 niveau de transit + 2 niveaux d'accès

6. Le Commutateur à Autonomie d'Acheminement CAA

- ☐ Est un commutateur d'accès
- ☐ Est un commutateur de transit
- ☐ Est localisé dans des zones urbaines peuplées, faciles d'accès
- ☐ Est localisé dans des zones rurales ou des zones difficiles d'accès

7. Pouvez-vous citer quelques opérateurs utilisant un préfixe « E » à ce jour ?

.....
.....
.....
.....
.....

8. Quel type d'équipement réseau les 4 chiffres « ABPQ » identifient-ils dans la numérotation à 10 chiffres EZ ABPQ MCDU ?

- ☐ Le Terminal demandeur
- ☐ Le Terminal demandé
- ☐ Le commutateur d'accès du « demandeur »
- ☐ Le commutateur d'accès du « demandé »

9. Une ressource « réseau » est aussi :

- ☐ Un Intervalle de Temps (IT)
- ☐ Un circuit à 64 Kbit/s
- ☐ Une voie de transmission partageable entre plusieurs communications

10. On partage le support de transmission entre plusieurs communications « classiques » simultanées en utilisant :

- ☐ le multiplexage temporel
- ☐ le multiplexage fréquentiel
- ☐ le multiplexage additionnel
- ☐ le multiplexage séquentiel

11. Question de rattrapage

Retrouvez brièvement le débit de la parole numérisée :

.....
.....
.....
.....
.....

Bonne chance



CORRIGE

1. Pouvez-vous citer quelques organismes de normalisation ?

UIT, ETSI, ANSI, IEEE, ISO……

2. Le Réseau Téléphonique Commuté est un :

◆ WAN
☐ MAN
☐ LAN
☐ CAN

3. Combien y a–t-il de liens entre 5 équipements réseaux maillés 2 à 2 ?

☐ 5 liens
◆ 10 liens
☐ 15 liens
☐ 20 liens

4. L'architecture d'un réseau de télécommunications définit :

☐ Le nombre d'équipements terminaux qui composent ce réseau
☐ Le nombre de commutateurs qui composent ce réseau
☐ Le nombre de liens qui interconnectent les équipements réseau
◆ La méthode d'interconnexion des équipements réseau

5. Le réseau de l'opérateur historique France Télécom est défini :

☐ Sur 3 niveaux hiérarchiques
◆ Sur 4 niveaux hiérarchiques
◆ Sur 2 niveaux de transit + 2 niveaux d'accès
☐ Sur 1 niveau de transit + 2 niveaux d'accès

6. Le Commutateur à Autonomie d'Acheminement CAA

◆ Est un commutateur d'accès
☐ Est un commutateur de transit
◆ Est localisé dans des zones urbaines peuplées, faciles d'accès
☐ Est localisé dans des zones rurales ou des zones difficiles d'accès

7. Pouvez-vous citer quelques opérateurs utilisant un préfixe « E » à ce jour ?

Télé 2 (4), Cégétel (7), FT (8), Neuf Télécom (9)

8. Quel type d'équipement réseau les 4 chiffres « ABPQ » identifient-ils dans la numérotation à 10 chiffres EZ ABPQ MCDU ?

☐ Le Terminal demandeur
☐ Le Terminal demandé
☐ Le commutateur d'accès du « demandeur »
◆ Le commutateur d'accès du « demandé »

9. Une ressource « réseau » est aussi :
- ◆ Un Intervalle de Temps (IT)
- ◆ Un circuit à 64 Kbit/s
- ☐ Une voie de transmission partageable entre plusieurs communications

10. On partage le support de transmission entre plusieurs communications « classiques » simultanées en utilisant :
- ◆ le multiplexage temporel
- ☐ le multiplexage fréquentiel
- ☐ le multiplexage additionnel
- ☐ le multiplexage séquentiel

11. Question de rattrapage

Retrouvez brièvement le débit de la parole numérisée :

Echantillonnage à 8 KHz, codage de ces échantillons sur 8 bits.

Soit un débit de 8000 x 8 = 64 Kbit/s

Nom/ Name:	*Prénom/first name :*	*Note :*

QCM-2
Trame MIC, commutation & signalisation
PCM frame, switching & signalling

Le 12 janvier 2006	**Sans documents**	Durée : 15 min
January 12, 2006	***Without documents***	*Time : 15 min*

Nota : Les questions peuvent avoir plusieurs réponses :
Foot-note: questions may have several responses.

1. La trame MIC est définie sur :

The PCM frame is defined on:

- ☐ 32 Intervalles de temps (IT) en Europe / *32 Time Slots (TS) in Europe*
- ☐ 31 Intervalles de temps (IT) en Europe / *31 Time Slots (TS) in Europe*
- ☐ 30 Intervalles de temps (IT) en Europe / *30 Time Slots (TS) in Europe*
- ☐ 24 Intervalles de temps (IT) au Japon / *24 Time Slots (TS) in Japan*
- ☐ 16 Intervalles de temps (IT) au Japon / *16 Time Slots (TS) in Japan*

2. Un signal échantillonné toutes les 100 μs et codé sur 16 bits a un débit de :

A signal sampled every 100 μs and coded on 16 bits has a bit rate of:

- ☐ 120 Kbit/s
- ☐ 160 Kbit/s
- ☐ 320 Kbit/s

3. La trame MIC Européenne peut transporter <u>au maximum</u> :

The European PCM frame can transmit at the maximum :

- ☐ 30 communications simultanées / *30 simultaneous communications*
- ☐ 31 communications simultanées / *31 simultaneous communications*
- ☐ 32 communications simultanées / *32 simultaneous communications*
- ☐ 64 communications simultanées / *64 simultaneous communications*

4. Pouvez-vous énumérer les différentes étapes de la numérisation du signal ?

Can you list the different steps of the digitalisation of the voice signal?

……
……
……
……
……

5. Le réseau téléphonique commuté RTC est basé sur :

The Public Switched Telephone Network PSTN is based on:

- ☐ La commutation de circuit / The circuit switching
- ☐ La commutation de paquets / the packet switching
- ☐ La commutation de cellules / the cell switching

6. En commutation de circuit:

With the circuit switching :

- ☐ Le circuit (IT) est partageable entre plusieurs communications simultanées */ The circuit (TS) is shared between several simultaneous communications*
- ☐ Le circuit (IT) est dédié à une seule communication / *The circuit (TS) is dedicated to only one communication*

7. En commutation de paquets, le mode « Circuit Virtuel » est plus rapide que le mode « datagramme » :

With the packet switching, the « Virtual Circuit » mode is faster than the « datagramme » mode:

- ☐ Vrai / *True*
- ☐ Faux / *False*

8. Le relayage de trames consiste à réduire les paramètres contenus dans l'entête d'un paquet. Quels sont ceux qui peuvent être supprimés ?

The Frame relay consists in reducing the parameters included in the header packet. Which are those which can be removed?

- ☐ Taille du paquet / *Packet size*
- ☐ Contrôle d'erreur / *Error control*
- ☐ Contrôle de flux */ Flow control*
- ☐ Adresse du destinataire */ Addressee address*
- ☐ Adresse de l'expéditeur */ Sender address*

9. La signalisation est un échange d'informations de « services »:

The signalling function is an exchange of "service" information :

- ☐ Entre les terminaux et les commutateurs/ *between terminal equipment and switches*
- ☐ Entre les opérateurs */ between operators*
- ☐ Entre les commutateurs / *between switches*
- ☐ Entre les abonnés */ between the subscribers*

10. Citez des exemples de messages de signalisation pour établir ou stopper un appel téléphonique:

Give examples of signalling messages to set up or stop a phone call:

……

……

…… **FINI / *THE END***

CORRECTION:

1. La trame MIC est définie sur :

The PCM frame is defined on:

- ■ 32 Intervalles de temps (IT) en Europe / *32 Time Slots (TS) in Europe*
- □ 31 Intervalles de temps (IT) en Europe / *31 Time Slots (TS) in Europe*
- □ 30 Intervalles de temps (IT) en Europe / *30 Time Slots (TS) in Europe*
- ■ 24 Intervalles de temps (IT) au Japon / *24 Time Slots (TS) in Japan*
- □ 16 Intervalles de temps (IT) au Japon / *16 Time Slots (TS) in Japan*

2. Un signal échantillonné toutes les 100 μs et codé sur 16 bits a un débit de :

A signal sampled every 100 μs and coded on 16 bits has a bit rate of:

- □ 120 Kbit/s
- ■ 160 Kbit/s
- □ 320 Kbit/s

3. La trame MIC Européenne peut transporter au maximum :

The European PCM frame can transmit at the maximum :

- ■ 30 communications simultanées / *30 simultaneous communications*
- □ 31 communications simultanées / *31 simultaneous communications*
- □ 32 communications simultanées / *32 simultaneous communications*
- □ 64 communications simultanées / *64 simultaneous communications*

4. Pouvez-vous énumérer les différentes étapes de la numérisation du signal ?

Can you list the different steps of the digitalisation of the voice signal?

Echantillonnage (Fe=8 KHz), quantification, codage (8 bits)
Sampling (Fs=8 KHz), quantification, coding (8 bits)

5. Le réseau téléphonique commuté RTC est basé sur :

The Public Switched Telephone Network PSTN is based on:

- ■ La commutation de circuit / The circuit switching
- □ La commutation de paquets / the packet switching
- □ La commutation de cellules / the cell switching

6. En commutation de circuit:

With the circuit switching :

- □ Le circuit (IT) est partageable entre plusieurs communications simultanées */ The circuit (TS) is shared between several simultaneous communications*
- ■ Le circuit (IT) est dédié à une seule communication / *The circuit (TS) is dedicated to only one communication*

7. En commutation de paquets, le mode « Circuit Virtuel » est plus rapide que le mode « datagramme » :

With the packet switching, the « Virtual Circuit » mode is faster than the « datagramme » mode:

- ☐ Vrai / *True*
- ■ Faux / *False* ***: moins on prend de précautions en QoS, plus on va vite ! / If no particular precaution is taken, one goes more quickly !***

8. Le relayage de trames consiste à réduire les paramètres contenus dans l'entête d'un paquet. Quels sont ceux qui peuvent être supprimés ?

The Frame relay consists in reducing the parameters included in the header packet. Which are those which can be removed?

- ☐ Taille du paquet / *Packet size*
- ■ Contrôle d'erreur / *Error control*
- ■ Contrôle de flux */ Flow control*
- ☐ Adresse du destinataire */ Addressee address*
- ☐ Adresse de l'expéditeur */ Sender address*

9. La signalisation est un échange d'informations de « services »:

The signalling function is an exchange of "service" information :

- ■ Entre les terminaux et les commutateurs/ *between terminal equipment and switches*
- ☐ Entre les opérateurs */ between operators*
- ■ Entre les commutateurs / *between switches*
- ☐ Entre les abonnés */ between the subscribers*

10. Citez des exemples de messages de signalisation pour établir ou stopper un appel téléphonique:

Give examples of signalling messages to set up or stop a phone call:

Décrochage, invitation à N° (tonalité), N° du correspondant distant, sonnerie
Raccrochage ***/ to pick up the phone, dialing tone, the called subscriber's N°, ringing, to hang up the phone***

FINI/ ***THE END***

Nom:	*Prénom:*	*Note:*

QCM - 2
Fonctions réseaux

Le 21 Décembre 2006	**Sans documents**	Durée : 15 min environ

Nota : Les questions peuvent avoir plusieurs réponses:

1. Pouvez-vous citer au moins 3 avantages de la fibre optique :

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Les réseaux câblés sont composés :
- ☐ Exclusivement de supports en fibres optiques
- ☐ Exclusivement de supports en câbles coaxiaux
- ☐ Exclusivement de supports radio
- ☐ A la fois de fibres optiques et de câbles coaxiaux

3. Le DSLAM est un équipement :
- ☐ Localisé chez le client
- ☐ Localisé chez l'opérateur
- ☐ Localisé éventuellement entre le client et l'opérateur
- ☐ Est obligatoire pour le HD sur boucle locale
- ☐ Est facultatif pour le HD sur boucle locale

4. L'ADSL est :
- ☐ Une technologie de transmission HD sur paire de cuivre
- ☐ Une technologie de transmission HD sur câbles coaxiaux
- ☐ Une technologie de transmission HD sur fibre optique
- ☐ Un système de commutation à HD
- ☐ Un système de signalisation normalisé à HD

5. La bande passante normalisée pour un modem ADSL 2+ est :
- ☐ [0 – 4 KHz]
- ☐ [0 – 1,1 MHz]
- ☐ [0 – 2,2 MHz]
- ☐ [0 – 12 MHz]

6. Le Reach Extended ADSL ou RE-ADSL
- ☐ « booste » le débit du signal
- ☐ « booste » la portée du signal
- ☐ Amplifie le signal sur une partie de la bande passante du support

7. Le Triple Play signifie :
- ☐ Internet HD + fax sur IP + téléphonie mobile sur IP
- ☐ Internet HD + voix sur IP + TV sur IP
- ☐ Voix sur IP + TV sur IP + fax sur IP
- ☐ Voix sur IP + téléphonie mobile sur IP + fax sur IP

8. L'atténuation du signal sur une paire de cuivre :
- ☐ Augmente avec la fréquence
- ☐ Diminue avec la fréquence
- ☐ Dépend du diamètre du fil de cuivre
- ☐ Est de l'ordre de 0,1 dB/km
- ☐ Est de l'ordre de 10-100 dB/km

9. Le débit **A**symétrique de l'ADSL correspond
- ☐ A un débit descendant supérieur au débit montant
- ☐ A un débit descendant inférieur au débit montant
- ☐ A un débit identique au débit montant

10. Question de rattrapage

Citez 3 paramètres qui distinguent la partie « cœur » de réseau de sa partie « accès » :

.....

.....

.....

Bonne chance



CORRIGE

1. Pouvez-vous citer au moins 3 avantages de la fibre optique :

Sa bande passante très large offrant une flexibilité pour les débits, très haute en fréquente offrant des très hauts débits ;
Son atténuation très faible en comparaison avec les autres supports (de l'ordre de 0,17dB/km) ;
Son faible encombrement, sa légèreté, sa sécurité pour les données transférées, son indépendance vis-à-vis de l'environnement, l'absence de rayonnement

2. Les réseaux câblés sont composés :

☐ Exclusivement de supports en fibres optiques
☐ Exclusivement de supports en câbles coaxiaux
☐ Exclusivement de supports radio
◆ A la fois de fibres optiques et de câbles coaxiaux

3. Le DSLAM est un équipement :

☐ Localisé chez le client
◆ Localisé chez l'opérateur
◆ Localisé éventuellement entre le client et l'opérateur
◆ Est obligatoire pour le HD sur boucle locale
☐ Est facultatif pour le HD sur boucle locale

4. L'ADSL est :

◆ Une technologie de transmission HD sur paire de cuivre
☐ Une technologie de transmission HD sur câbles coaxiaux
☐ Une technologie de transmission HD sur fibre optique
☐ Un système de commutation à HD
☐ Un système de signalisation normalisé à HD

5. La bande passante normalisée pour un modem ADSL 2+ est :

☐ [0 – 4 KHz]
☐ [0 – 1,1 MHz]
◆ [0 – 2,2 MHz]
☐ [0 – 12 MHz]

6. Le Reach Extended ADSL ou RE-ADSL

☐ « booste » le débit du signal
◆ « booste » la portée du signal
◆ Amplifie le signal sur une partie de la bande passante du support

7. Le Triple Play signifie :

☐ Internet HD + fax sur IP + téléphonie mobile sur IP
◆ Internet HD + voix sur IP + TV sur IP
☐ Voix sur IP + TV sur IP + fax sur IP
☐ Voix sur IP + téléphonie mobile sur IP + fax sur IP

8. L'atténuation du signal sur une paire de cuivre :
- ◆ Augmente avec la fréquence
- ☐ Diminue avec la fréquence
- ◆ Dépend du diamètre du fil de cuivre
- ☐ Est de l'ordre de 0,1 dB/km
- ◆ Est de l'ordre de 10-100 dB/km

9. Le débit **A**symétrique de l'ADSL correspond
- ◆ A un débit descendant supérieur au débit montant
- ☐ A un débit descendant inférieur au débit montant
- ☐ A un débit identique au débit montant

10. Question de rattrapage

Citez 3 paramètres qui distinguent la partie « cœur » de réseau de sa partie « accès » :

Le support de transmission, le débit, la distance

Institut National des Télécommunications	Module : **IRD11 – Réseaux de données**	
Domaine: **1ère Année.**	Responsable : Olivier Paul	
Durée: **1H30**	Documents : **Autorisés**	Nombre de pages :**5 pages**
NOM :	**Prénom :**	**Note:**

- L'épreuve comporte deux exercices.

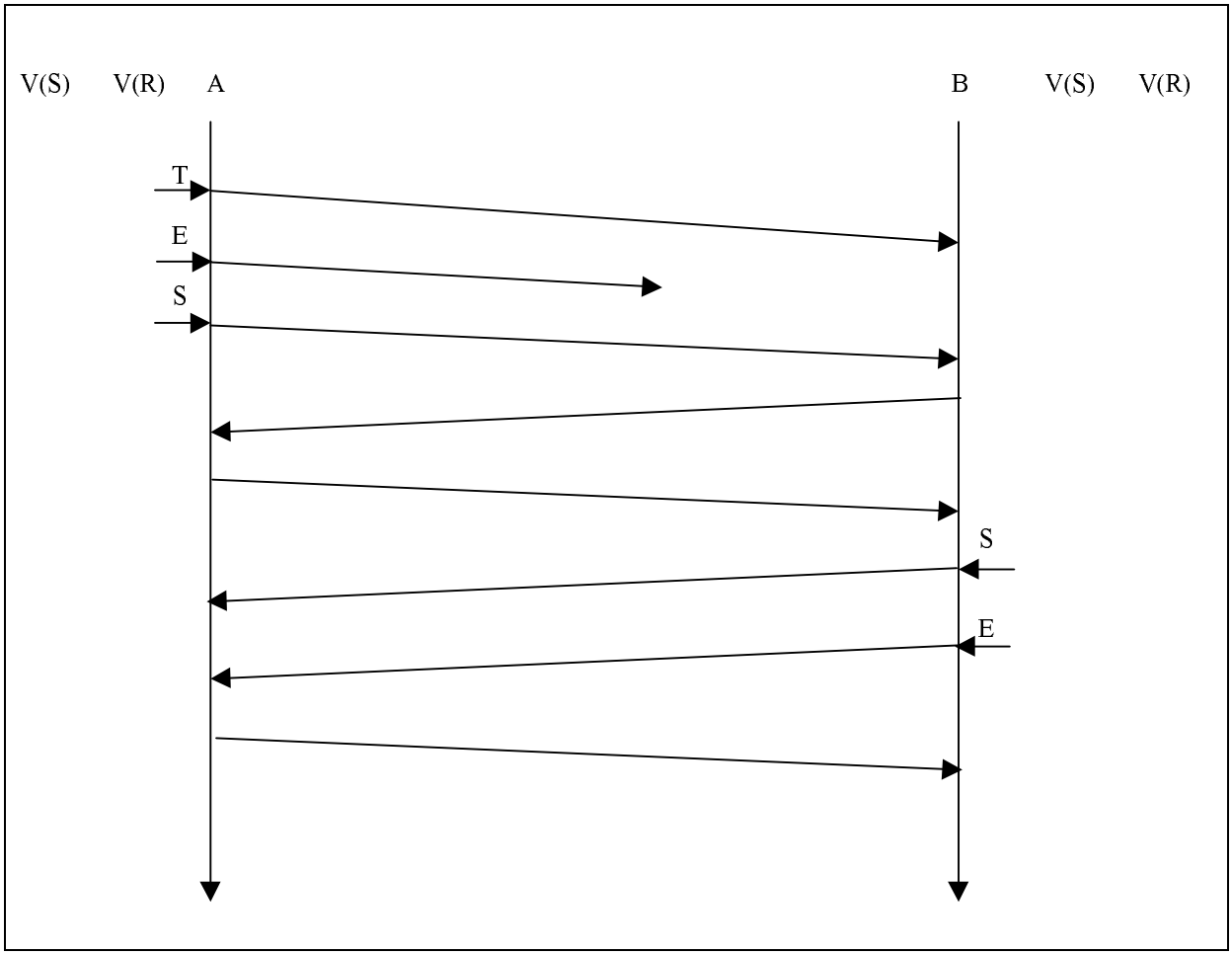
Exercice I : **Fenêtrage et rejet selectif.** (12 points)

I.1 Rappelez ce qu'est la fenêtre dans HDLC et à quoi elle sert.

On s'intéresse au protocole de rejet sélectif existant dans HDLC et son impact sur la notion de fenêtre. On rappelle que dans HDLC, le protocole de rejet sélectif fonctionne de la manière suivante:

- Les trames peuvent être reçues et émises hors séquence.
- Chaque entité maintient deux compteurs V(S) et V(R). Dans le **cas général**:
  - V(S) est incrémenté de 1 lorsqu'une trame est émise. Il indique le numéro de la prochaine trame à transmettre.
  - V(R) est incrémenté de 1 lorsqu'une trame est reçue. Il indique le numéro de la prochaine trame attendue.
- L'émetteur est autorisé à émettre les trames numérotées entre N(R) et N(R)+k où N(R) est le dernier numéro de trame acquitté et k la taille de la fenêtre.
- Le récepteur accepte les trames numérotées entre V(R) et V(R)+k où V(R) est le numéro de trame attendu et k la taille de la fenêtre.
- Les trames hors fenêtre sont ignorées à la réception.
- Le récepteur maintient un buffer de réception dans lequel il stocke les trames avant la transmission des données qui leur sont associées à l'entité supérieure. Les données d'une trame sont délivrées à l'entité supérieure lorsque les trames précédentes ont toutes été reçues.
- Lorsqu'une trame hors séquence (N(S) différent de V(R)) arrive au récepteur, celui-ci émet une trame S-SREJ (rejet sélectif) indiquant la première trame manquante: V(R). Cette trame est identifiée par le champ N(R). Les trames reçues par la suite ne sont pas rejetée mais stockées dans le buffer de réception. La valeur de V(R) est maintenue à la valeur identifiant la première trame manquante.
- Lorsqu'il reçoit une trame S-SREJ, l'émetteur retransmet la trame demandée. Si le bit F n'est pas positionné, la valeur de V(S) est maintenue à la valeur identifiant la dernière trame envoyée. Si le bit F est positionné, la trame S-SREJ est considérée comme une trame d'acquittement, la valeur de V(S) prend la valeur de N(R).
- Lorsqu'une trame est reçue en séquence, V(R) est incrémenté jusqu'à la valeur immédiatement supérieure au dernier numéro de trame reçu correctement en prenant en compte les trames éventuellement stockées dans le buffer de réception (Si k trames sont présentes dans le buffer, V(R) est avancé à V(R)+k).
- Lors de l'expiration du timer associé à une trame, celle-ci est renvoyée avec le bit P positionné.
- Lors de la réception d'une trame d'information avec le bit P positionné, l'entité réceptrice répond immédiatement avec une trame avec le bit F positionné. Celle-ci acquitte toutes les trames reçues correctement en indiquant le prochain numéro de trame attendu N(R). Si la trame contient une valeur de V(S) différente de la valeur N(R) attendue par l'entité réceptrice, le contenu de la trame est ignoré.
- Lorsqu'elle reçoit une trame d'acquittement avec le bit F positionné et portant la valeur N(R), l'entité émettrice considère que les trames reçues avant N(R) ont été reçues correctement et avance V(S) à N(R).

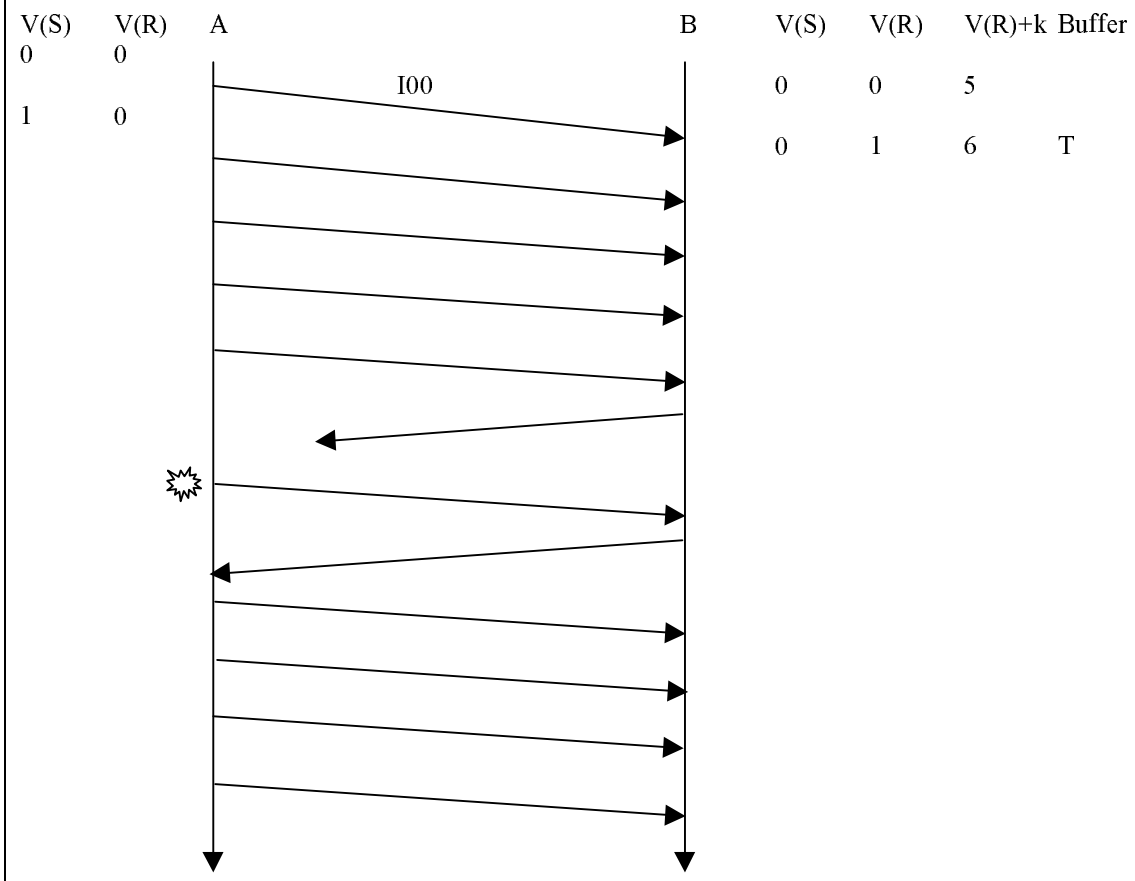
I.2 On considère deux entités HDLC A et B qui emploient le protocole de rejet sélectif. La taille de la fenêtre est de 3 en A et B. L'entité A a 3 trames d'information à émettre, l'entité B a 2 trames d'information à émettre. Donnez les types de trames et les valeurs des champs N(R) et N(S) des trames échangées. Donnez les valeurs des champs V(R) et V(S) pour chaque entité. On supposera que les valeurs V(S) et V(R) sont initialisées à 0 au départ. On suppose que chaque trame transporte un caractère. A transmettra `TES`, B transmettra `SE`. Donnez le message transmit à l'entité supérieure. Vous indiquerez au travers d'une flèche le moment ou cette transmission est réalisée.



I.3 Quel est à votre avis l'avantage de la technique du rejet sélectif. Expliquez pourquoi.

On rappelle que les valeurs N(R) et N(S) sont codées sur 3 bits.

I.4 On considère deux entités HDLC A et B qui emploient le protocole de rejet sélectif. La taille de la fenêtre est de 5 en A et B. L'entité A a 9 trames d'information à émettre, l'entité B n'a pas de trame d'information à émettre. Donnez les types de trames et les valeurs des champs N(R) et N(S) des trames échangées. Donnez les valeurs des champs V(R) et V(S) pour chaque entité. On supposera que les valeurs V(S) et V(R) sont initialisées à 0 au départ. On suppose que chaque trame transporte un caractère. A transmettra `TEST_RD12`. Donnez l'évolution du contenu du buffer en B et la valeur de la borne de la fenêtre V(R)+k. La forme  indique les expirations de timers. On suppose que la valeur V(R) est incrémentée avant la transmission du buffer à l'entité réseau. On représentera le contenu du buffer avant sa transmission. Les éventuels emplacements vides dans le buffer seront indiqués par le caractère □.



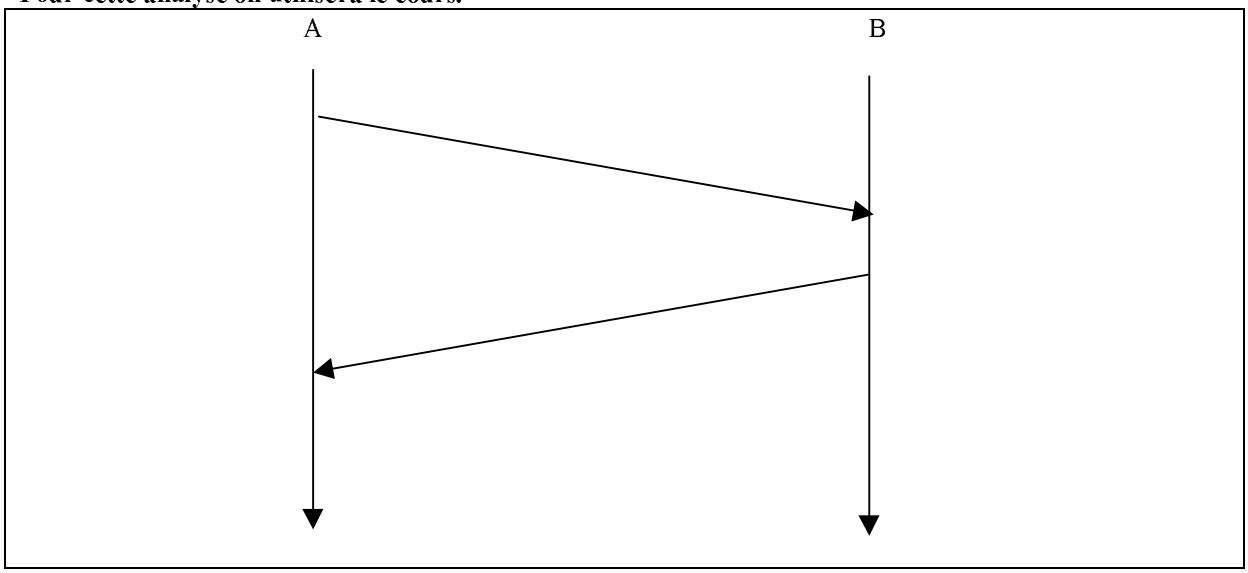
I.5 Pourquoi le problème présenté en cours pour le rejet sélectif ne se pose pas ? Comparez le coût des deux approches.

Exercice II : **Analyse de trafic Ethernet** (8 points)

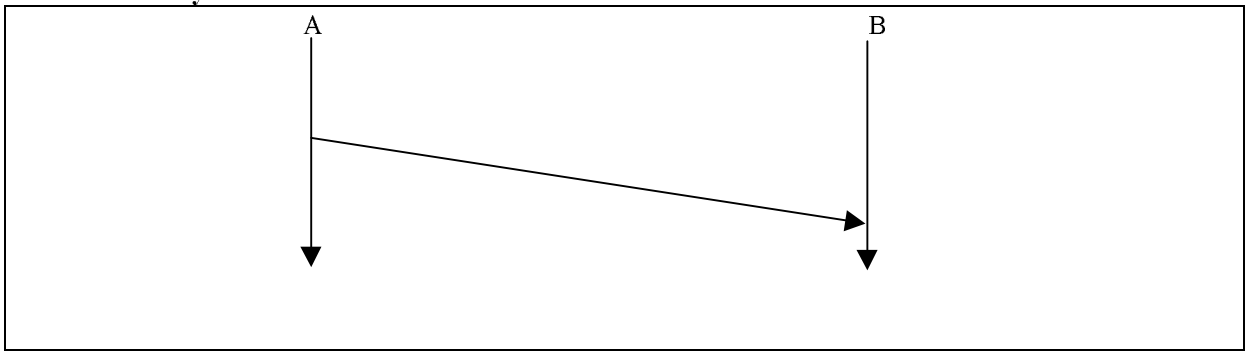
On souhaite analyser un échange entre deux entités Ethernet A et B. Pour cela on utilise un outil de capture qui se place sur le même réseau que les deux entités. Le résultat de la capture est indiqué ci dessous sous la forme d'une suite de chiffre hexadécimaux. La première colonne (0000, 0010, ...) indique le décalage en octets des données en début de ligne depuis le début de la trame.

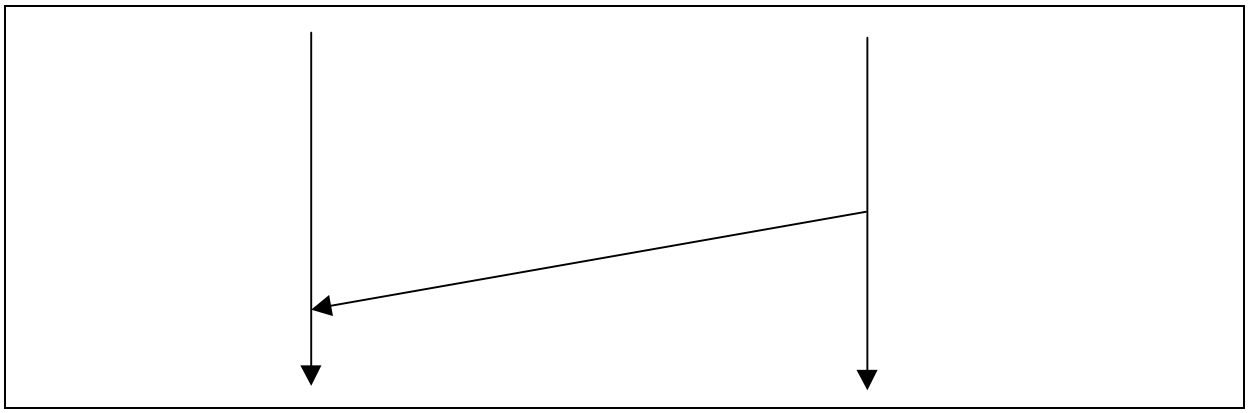
```
Trame 1:
0000  00 d0 03 ea e4 00 00 03 47 fa f8 f6 08 00 45 00
0010  00 3c 79 24 00 00 80 01 ba e8 9d 9f 67 4a 9d 9f
0020  64 2b 08 00 30 3a 02 00 1b 22 61 62 63 64 65 66
0030  67 68 69 6a 6b 6c 6d 6e 6f 70 71 72 73 74 75 76
0040  77 61 62 63 64 65 66 67 68 69

Trame 2:
0000  00 03 47 fa f8 f6 00 d0 03 ea e4 00 08 00 45 00
0010  00 3c bf e8 00 00 3f 01 b5 24 9d 9f 64 2b 9d 9f
0020  67 4a 00 00 38 3a 02 00 1b 22 61 62 63 64 65 66
0030  67 68 69 6a 6b 6c 6d 6e 6f 70 71 72 73 74 75 76
0040  77 61 62 63 64 65 66 67 68 69
```

II.1 Dessinez au moyen d'un diagramme temporel l'échange au niveau Ethernet en donnant pour chaque trame, le type de la trame (802.3/Ethernet), les adresses source et destination et le type de protocole/longueur de la trame.
Pour cette analyse on utilisera le cours.

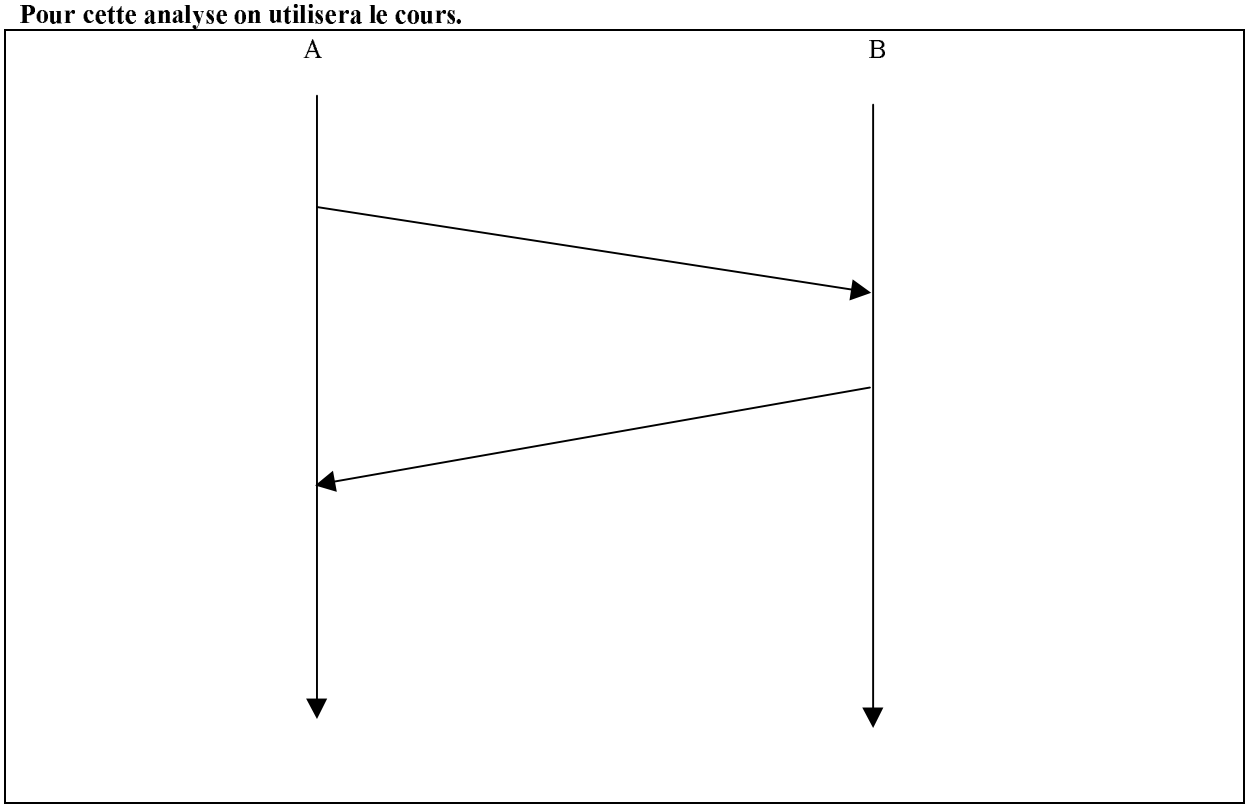


II.2 Dessinez au moyen d'un diagramme temporel l'échange au niveau supérieur au niveau Ethernet en donnant pour chaque paquet, la version du protocole utilisé, les adresses source et destination ainsi que le protocole supérieur.
Pour cette analyse on utilisera le cours.





II.3 Dessinez au moyen d'un diagramme temporel l'échange au niveau supérieur au niveau de la question II.2 en donnant pour chaque unité de donnée, les valeurs des champs type et code.
Pour cette analyse on utilisera le cours.



Institut National des Télécommunications	Module : **IRD12 – Réseaux de données**	
Domaine: **1ère Année.**	Responsable : Olivier Paul	
Durée: **1H30**	Documents : **Autorisés**	Nombre de pages :**4 pages**
NOM :	**Prénom :**	**Note:**

- L'épreuve comporte deux exercices.

Exercice I : **Questions diverses.** (8 points)

I.1 Expliquez ce qu'est le service de contrôle d'accès au medium.

I.2 Expliquez le fonctionnement du service de contrôle d'accès au medium dans Ethernet.

I.3 Expliquez (éventuellement de manière graphique) pourquoi le temps d'attente après collision dans Ethernet est proportionnel à la distance entre les deux équipements les plus éloignés du réseau.

Exercice II : **Analyse d'un échange de trames HDLC** (12 points)

On souhaite analyser un échange de trames HDLC entre deux entités A et B. Pour cette analyse on se reportera au format des trames HDLC donné en cours. Les trames présentées contiennent tous les champs tels que fournis par la couche physique. Le suffixe "0x" indique un code hexadécimal.

No	Dir.	Valeur hexadécimale capturée
1	A->B	0x7e014373617361733dbb7e
2	A->B	0x7e0153632763276311c47e
3	A->B	0x7e01636d6f6d23a97e
4	B->A	0x7e01357361736173e0407e
5	B->A	0x7e01466f756f75a62e7e
6	A->B	0x7e016d6d6f6d8deb7e
7	B->A	0x7e019f428f3f0
8	A->B	0x7e01756f616f61df627e
9	B->A	0x7e015f636f636f635becbf0
10	A->B	0x7e0186085e7e
11	B->A	0x7e01806d687e

Conversion hexadécimal-binaire:

0x0	**0x1**	**0x2**	**0x3**	**0x4**	**0x5**	**0x6**	**0x7**
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
0x8	**0x9**	**0xa**	**0xb**	**0xc**	**0xd**	**0xe**	**0xf**
1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

II.1 Donnez la valeur binaire de chacune de ces trames après application du service de délimitation.

No	Dir.	Valeur binaire
1	A->B	
2	A->B	
3	A->B	
4	B->A	
5	B->A	
6	A->B	
7	B->A	
8	A->B	
9	B->A	
10	A->B	
11	B->A	

II.2 Donnez la valeur binaire de chacune de ces trames après application du service de transparence.

No	Dir.	Valeur binaire
1	A->B	
2	A->B	
3	A->B	
4	B->A	
5	B->A	
6	A->B	
7	B->A	
8	A->B	
9	B->A	
10	A->B	
11	B->A	

II.3 Donnez la valeur des champs suivants pour chacune des trames.

No	Dir.	Adresse	Type	Fonction	N(S)	P	N(R)
1	A->B						
2	A->B						
3	A->B						
4	B->A						
5	B->A						
6	A->B						
7	B->A						
8	A->B						
9	B->A						
10	A->B						
11	B->A						

II.4 Utilise-t-on le mode de rejet sélectif ou le mode "go back n" ? Justifiez votre réponse.

II.5 Quelle est la taille minimale de la fenêtre en A et en B ? Justifiez votre réponse.

II.6 Représentez au moyen d'un diagramme temporel l'échange entre A et B en donnant les valeurs des compteurs de part et d'autre.

Institut National des Télécommunications	Module : **IRD12 – Réseaux de données**	
Domaine: **1ère Année.**	Responsable : Olivier Paul	
Durée: **1H30**	Documents : **Autorisés**	Nombre de pages :**5 pages**
NOM :	**Prénom :**	**Note:**

- L'épreuve comporte deux exercices.

Exercice I : **Protocole de terminal virtuel** (10 points)

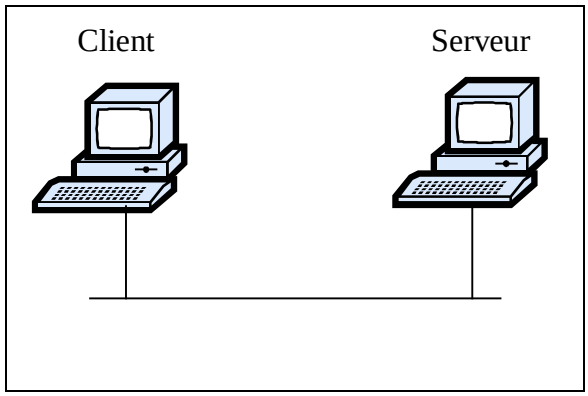
On s'intéresse dans cet exercice au rendement d'une pile protocolaire dans un réseau local. On considère un protocole de terminal virtuel (similaire à telnet) permettant de contrôler un équipement distant. Dans ce protocole les entités ont un rôle asymétrique:

- L'entité "client" lit les caractères tapés au clavier par l'utilisateur et stocke ces caractères dans un buffer. Ce buffer est transmit à l'entité "serveur" lorsque l'utilisateur tape sur le caractère "Retour chariot" de son clavier. Le buffer contient alors également ce dernier caractère. La taille maximale du buffer est de 256 caractères.
- Lorsqu'elle reçoit le contenu d'un buffer, l'entité "serveur" exécute le contenu du buffer, récupère le résultat, stocke celui-ci dans un buffer et envoie le buffer à l'entité "client".
- L'entité "client" lorsqu'elle reçoit le contenu d'un buffer affiche le contenu de celui-ci sur l'écran de l'équipement client.

Ce protocole utilise directement le protocole IPv4. Pour cela il dispose de deux primitives:

- Send(buffer, addr, proto) qui permet d'envoyer un paquet IP contenant le contenu de "buffer" à l'entité identifiée par le protocole "proto" sur l'équipement d'adresse "addr".
- Receive(buffer, proto) qui permet à une entité de récupérer le contenu d'un buffer envoyé au protocole "proto" dans la variable "buffer".

On se place dans le cadre d'un réseau local utilisant le protocole Ethernet.



I.1 Dessinez la pile protocolaire du client et du serveur.

On suppose que la transmission est sans perte et sans erreur et qu'il n'y a pas de collision générée au niveau ethernet. On suppose que chaque caractère est codé sur 1 octet. On utilisera la définition suivante du rendement d'un protocole:

$$R = \frac{\text{nombre de bits utiles envoyés par l'utilisateur du coté émetteur}}{\text{nombre de bits soumis depuis/vers la couche physique du coté récepteur.}}$$

On supposera par la suite que la couche physique transmet à la couche Ethernet l'ensemble de la trame Ethernet à l'exclusion du délimiteur et préambule.

I.2 Calculez le rendement du protocole de terminal virtuel dans le sens client vers serveur en fonction de la quantité de caractères *n* soumise par l'utilisateur.

I.3 Faites l'application numérique si l'utilisateur tape "ps" suivi du caractère "retour chariot".

On suppose maintenant que l'on prend en compte le protocole ARP qui permet de faire la résolution d'adresse IP/MAC entre la machine cliente et la machine destination.

I.4 Calculez le rendement du protocole de terminal virtuel dans le sens client vers serveur en fonction de la quantité de caractères *n* soumise par l'utilisateur.

I.5 Faites l'application numérique si l'utilisateur tape "ps" suivi du caractère "retour chariot".

I.6 En vous inspirant de ce que vous avez vu en TP, quelle est à votre avis la méthode utilisée par ARP pour faire en sorte que le rendement ne soit pas dégradé de cette manière à chaque envoi ?

I.7 En dehors du fonctionnement du protocole ARP, proposez une autre méthode permettant d'améliorer le rendement. Quels sont ses avantages et inconvénients ?

Exercice II : **Code de correction d'erreur** (10 points)

On s'intéresse à la construction d'un code simple de correction d'erreurs. Pour cela on se propose tout d'abord d'utiliser un code à répétition. Ce code est construit en répétant le motif de donnée que l'on désire transporter.

II.1 Rappelez la fonction d'un code de correction d'erreur et la façon dont il fonctionne.

Le code en question est le suivant:

Données	**Code**
00	0000
01	0101
10	1010
11	1111

II.2 Quelle est la distance minimale de Hamming de ce code ? Justifiez votre réponse.

II.3 Combien d'erreurs ce code peut il corriger au maximum ? Justifiez votre réponse

On cherche maintenant à améliorer ce code.

II.4 Combien de bits sont en théorie nécessaires pour corriger n'importe qu'elle erreur d'un bit sur les données de ce code ? Justifiez votre réponse.

II.5 Proposez un code plus efficace. Montrez que ce code corrige bien toute erreur d'un bit.

Ce code optimal est appelé code de Hamming (5,2).

UV Physique

SF - PG - RA

Caliente

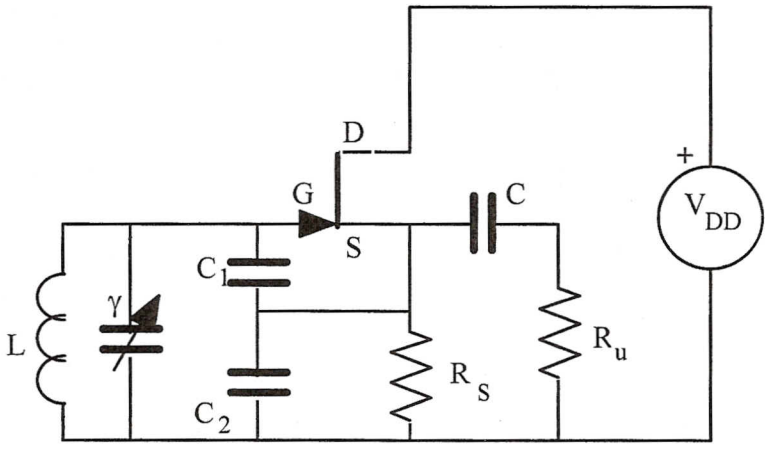
INT 2007 - 2008

PHY 3001

SYSTÈMES ET FONCTIONS DE L'ÉLECTRONIQUE

CONTRÔLE DES CONNAISSANCES
sans documents

On désire réaliser la démodulation d'un signal radiophonique en modulation de fréquence en utilisant une boucle d'asservissement de phase. Le signal à démoduler est centré sur la fréquence intermédiaire du récepteur, f_0 = 10,7 MHz, fréquence centrale de la boucle. On propose d'étudier l'oscillateur commandé en tension (VCO) de cette boucle.
L'oscillateur est réalisé selon le montage suivant :



Le signal de sortie de l'oscillateur est appliqué à un comparateur de phase dont la charge est représentée par une résistance R_u = 1000 Ω
L'oscillateur fait intervenir un transistor à effet de champ dont les caractéristiques sont les suivantes :

I_{DSS} = 8 mA $\qquad$ V_{GSoff} = – 4 V

$I_D = I_{DSS}\,(1 - \frac{V_{GS}}{V_{GSoff}})^2$ $\qquad$ si $V_{GS} > V_{Gsoff}$ $\qquad$ et $\qquad$ $V_{DS} > -V_{Gsoff}+V_{GS}$

Il est alimenté par une source de tension continue V_{DD} = 9 V.

Le condensateur C est un condensateur de liaison (impédance infinie en continu et impédance considérée comme nulle en régime d'oscillation).

Les autres condensateurs (C_1, C_2 et γ) sont des condensateurs d'accord permettant à l'oscillateur de fonctionner et de délivrer un signal sinusoïdal à la fréquence f_0 désirée. Le condensateur γ présente une capacité variable commandée électroniquement.

1. Étude du régime continu

1.1. Représenter le schéma du montage en continu.

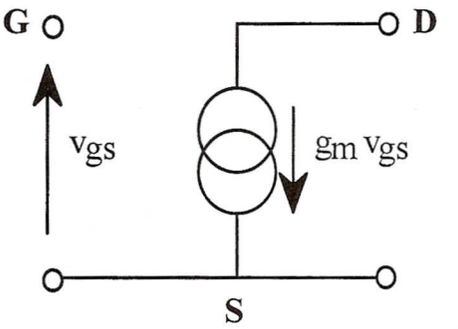
1.2. On souhaite que le transistor soit en régime de fonctionnement normal et polarisé au point de fonctionnement suivant : V_{GS} = – 3V

1.2.1. Calculer la valeur du courant circulant dans le transistor.

1.2.2. Déterminer la valeur de la résistance R_S permettant d'obtenir le point de fonctionnement désiré.

1.2.3. En déduire la valeur de la tension V_{DS}.

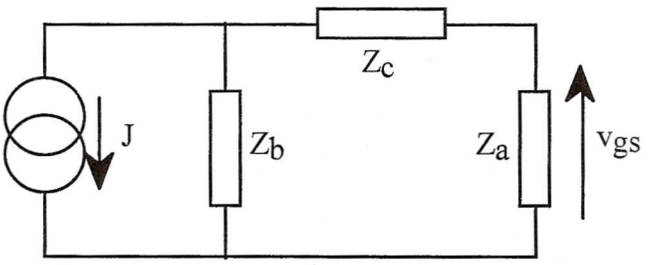
2. Détermination des conditions d'oscillation



2.1. En régime de variations (ou d'oscillation), le transistor est caractérisé par le schéma équivalent ci-contre.
Déterminer la valeur de g_m intervenant dans le schéma

2.2. Donner le schéma du montage en régime d'oscillation.

2.3. Montrer que le schéma précédent peut être présenté sous la forme suivante faisant intervenir une source de courant et trois impédances (plus ou moins complexes):



Donner les expressions de J, $Y_a=1/Z_a$, $Y_b=1/Z_b$ et $Y_c=1/Z_c$.

2.4. En résolvant le circuit, on trouve alors que la tension v_{gs} s'exprime sous la forme :

$$v_{gs} = -\frac{Y_c\, J}{Y_b(Y_a + Y_c) + Y_a\, Y_c}$$

En utilisant les résultats précédents, déterminer à quelle condition, cette équation admet une solution v_{gs} non nulle.

2.5. On donne : L = 1 µH

Déterminer les valeurs de C_1 et C_2 pour que l'oscillateur fonctionne et délivre un signal sinusoïdal de fréquence f_0 quand γ présente une capacité égale à 50 pF.

NOM : AGNUS
Prénom : Christelle

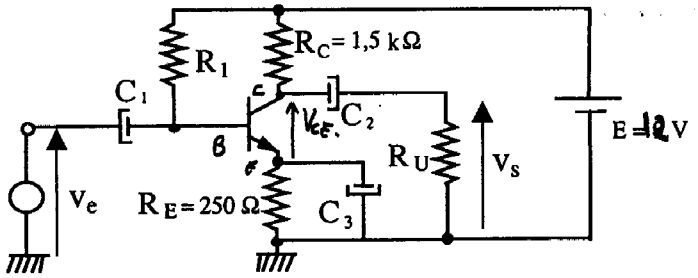
Groupe de TD : 6

INT Contrôle Continu -2- SF 11 15/11/05

Durée : 15 mn **AUCUN DOCUMENT N'EST AUTORISÉ**

Les réponses seront données directement sur l'énoncé. Ne pas oublier d'inscrire votre nom et prénom.
Les machines à calculer ne sont pas autorisées.

Soit le montage amplificateur à transistor bipolaire suivant :



$E = 12$ V, $V_{BE} = 0,6$ V et le potentiel thermique $V_T = 25$ mV, on prendra $\alpha = 1$
On veut que V_{CE} soit égal à 6 V, on demande :

1. calculer le courant Ic qui circule dans le collecteur du transistor.
2. en déduire la valeur de r_e résistance dynamique de la jonction Base - Emetteur
3. représenter le schéma équivalent du montage, en régime de variation, on sait que les condensateurs présentent des impédances nulles aux fréquences de travail.
4. sachant que $R_C = R_U$ quelle est l'amplification en tension A_V du montage ?

Réponses :

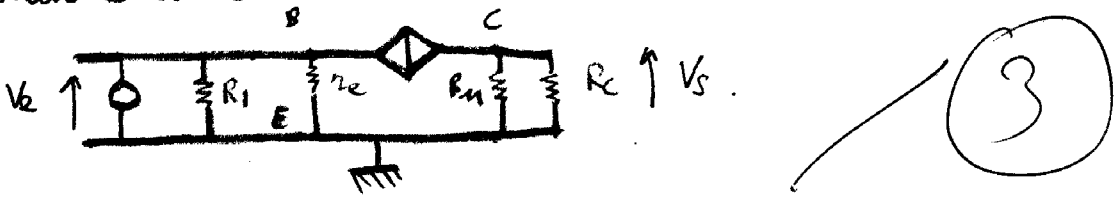
1) Au point de repos, les condensateurs sont considérés comme des interrupteurs ouverts
loi d'Ohm pour R_C : (1) $E - V_C = R_C I_C$
or $V_C = R_E I_E + V_{CE} = R_E I_C + V_{CE}$ car $\alpha = 1$.
(1) $\Rightarrow E - R_E I_C - V_{CE} = R_C I_C$
$\Rightarrow I_C = \frac{E - V_{CE}}{R_E + R_C}$
$I_C \simeq \frac{12 - 6}{250 + 1500} = \frac{6}{1750} \simeq 3,5\,mA = 3,43\,mA$

3

2) $r_e = \frac{V_T}{I_E} = \frac{V_T}{I_C}$ car $I_C = \alpha I_E$ et $\alpha = 1$.
par définition
A.N : $r_e = \frac{25.10^{-3}}{6} \times 1750 \simeq \frac{25.10^{-3}}{3,5.10^{-3}} \simeq 7,29\,\Omega$

2

3) Les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs fermés (impédance nulle).
on éteint les sources continues indépendantes, on a alors le schéma aux variations :



3

SVPT.

4) Sachant que $R_c = R_u$ on a le schéma équivalent.



1

$$A_V = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_0 I_e}{r_e I_e} = -\frac{R_0}{r_e} = -\frac{1}{2}\frac{R_u}{r_e} = A_V.$$

$$A.N : A_V = \frac{1}{2} \times \frac{1,5\,10^3}{3,5\,10^{-3}} \simeq 10^6$$

$$A_V = -102,77.$$

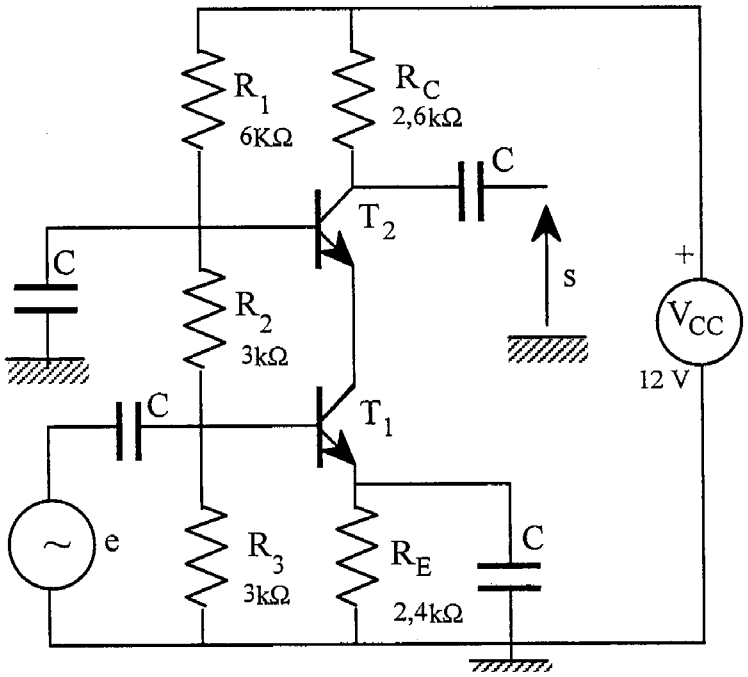
INT 2005 - 2006

Module SF 11

SYSTÈMES ET FONCTIONS DE L'ÉLECTRONIQUE

CONTRÔLE DES CONNAISSANCES
1h30

On considère le montage amplificateur à transistor suivant (entrée e, sortie s) :



Le montage est alimenté par une source de tension continue $V_{CC} = 12$ V.

Les condensateurs C sont des condensateurs de liaison ou de découplage: ils se présentent comme des **circuits ouverts en continu** et comme des **courts circuits en régime de variation.**

1. On désire étudier le régime continu (régime de polarisation) du montage. On suppose que les courants de base des deux transistors sont suffisamment faibles pour être considérés comme nuls et que a priori, les transistors sont en mode de fonctionnement normal (ni bloqué, ni saturé). On donne alors :

$$V_{BE\,1} \approx V_{BE\,2} \approx 0{,}6 \text{ V}$$

On désigne par V_{Kj} le potentiel, par rapport à la masse, de l'électrode K (K égal à E ou B ou C) du transistor j (j égal à 1 ou 2).

1.1. En éteignant la source alternative d'entrée e, donner le schéma du montage en régime continu.

1.2. Déterminer les potentiels V_{B1} et V_{B2} sur la base des transistors T_1 et T_2.

1.3. En déduire les potentiels V_{E1} et V_{E2}.

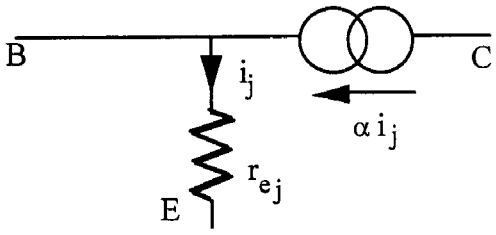
1.4. En déduire la valeur des courants circulant dans les transistors T_1 et T_2.

1.5. Déterminer les potentiels V_{C1} et V_{C2}.

1.6. Vérifier alors que l'hypothèse du régime normal est légitime.

2. Étude du régime de variations (régime alternatif ou dynamique) : $e \neq 0$

En régime de variations, chaque transistor j est supposé caractérisé par le schéma équivalent ci-contre.



On donne de plus : $\frac{kT}{q} = 26$ mV

et : $\alpha = 0{,}99$

2.1. Préciser la valeur de r_{ej} intervenant dans le schéma équivalent de chaque transistor.

2.2. Donner le schéma équivalent de l'amplificateur en régime de variations.

2.3. Déterminer l'expression de la tension de sortie s en fonction de e et des éléments du montage et faire l'application numérique.

2.4. Déterminer la résistance d'entrée R_e du montage.

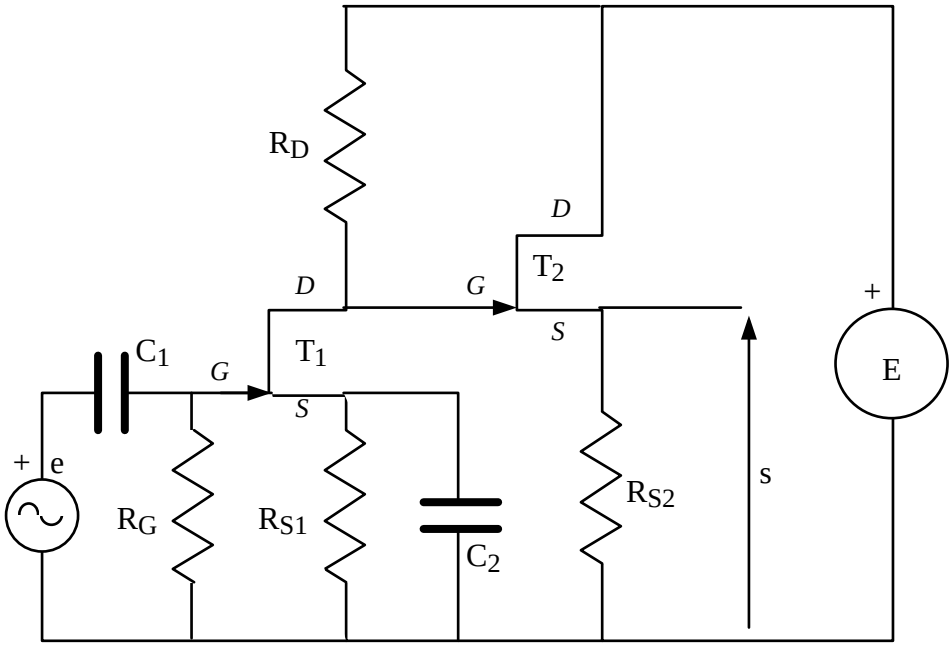
INT 2006 - 2007

Module SF 11

SYSTÈMES ET FONCTIONS DE L'ÉLECTRONIQUE

CONTRÔLE DES CONNAISSANCES
1h30 *AVEC DOCUMENTS MANUSCRITS*

On considère le montage amplificateur à transistor à effet de champ suivant (entrée e, sortie s) :



Le montage est alimenté par une source de tension continue E = 20 V.
Les condensateurs C_1 et C_2 sont des condensateurs de liaison ou de découplage: ils se présentent comme des **circuits ouverts en continu** et comme des **courts circuits en régime de variations.**
Les transistors à effet de champ T_1 et T_2 sont de nature identique.

On donne : $R_D = 5\ k\Omega$ $R_G = 1\ M\Omega$

1. On désire étudier le régime continu (régime de polarisation) du montage.

1.1. Représenter le schéma du montage en régime continu.

1.2. On suppose que les transistors sont polarisés dans leur zone de fonctionnement « normal » : courant de grille nul et courant de drain lié à la tension V_{GS} par la relation :

$$I_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_{GSoff}}\right)^2 \qquad I_{DSS} = 8\ mA \qquad V_{Gsoff} = -4V$$

On souhaite que les deux transistors soient polarisés avec une tension V_{GS} égale à –2V.

1.2.1. Calculer les courants circulant dans les deux transistors.

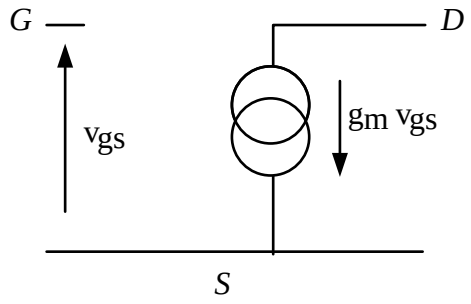
1.2.2. En déduire la valeur de la résistance R_{S1} permettant de réaliser $V_{GS1} = -2V$.

1.2.3. Déterminer le potentiel sur le drain du transistor T_1. En déduire la valeur de R_{S2} permettant de réaliser $V_{GS2} = -2V$.

1.2.4. Déterminer les valeurs des tensions drain-source V_{DS1} et V_{DS2} des deux transistors.

2. Étude du régime de variations (régime alternatif ou dynamique) : e ≠ 0

En régime de variations, chaque transistor est supposé caractérisé par le schéma équivalent ci-contre.



2.1. Préciser l'expression générale et la valeur de g_m intervenant dans les schémas équivalents des deux transistors.

2.2. Donner le schéma équivalent de l'amplificateur en régime de variations.

2.3. Déterminer l'expression de la tension de sortie s en fonction de e et des éléments du montage et faire l'application numérique.

2.4. Déterminer la résistance d'entrée R_e du montage.

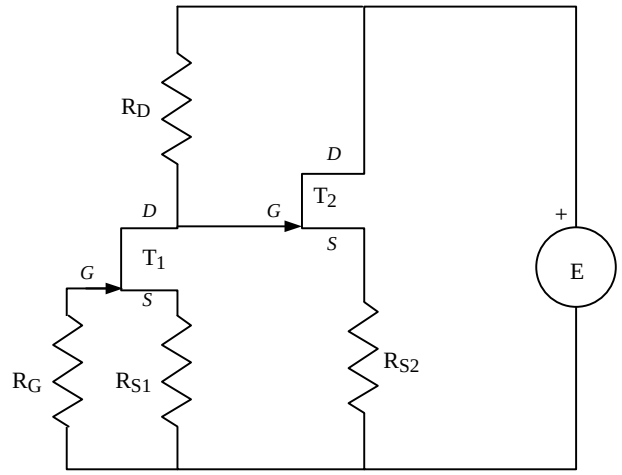
INT 2006 - 2007

Module SF 11

SYSTÈMES ET FONCTIONS DE L'ÉLECTRONIQUE

CORRIGÉ DU CONTRÔLE

1.1.



1.2.1. En appliquant la relation :

$I_D = I_{DSS}\,(1 - \frac{V_{GS}}{V_{GSoff}})^2$ on obtient :

$\boxed{I_{D1} = 2mA}$ $\boxed{I_{D2} = 2mA}$

1.2.2. On a : $V_{GS1} = V_{G1} - V_{S1} = -V_{S1}$

$V_{S1} = R_{S1}\, I_{D1}$

soit : $\boxed{R_{S1} = 1000\,\Omega}$

1.2.3. $V_{D1} = E - R_D\, I_{D1} = 10$ V

$V_{GS2} = V_{D1} - V_{S2}$ $V_{S2} = 12$ V

$V_{S2} = R_{S2}\, I_{D2}$

soit : $\boxed{R_{S2} = 6000\,\Omega}$

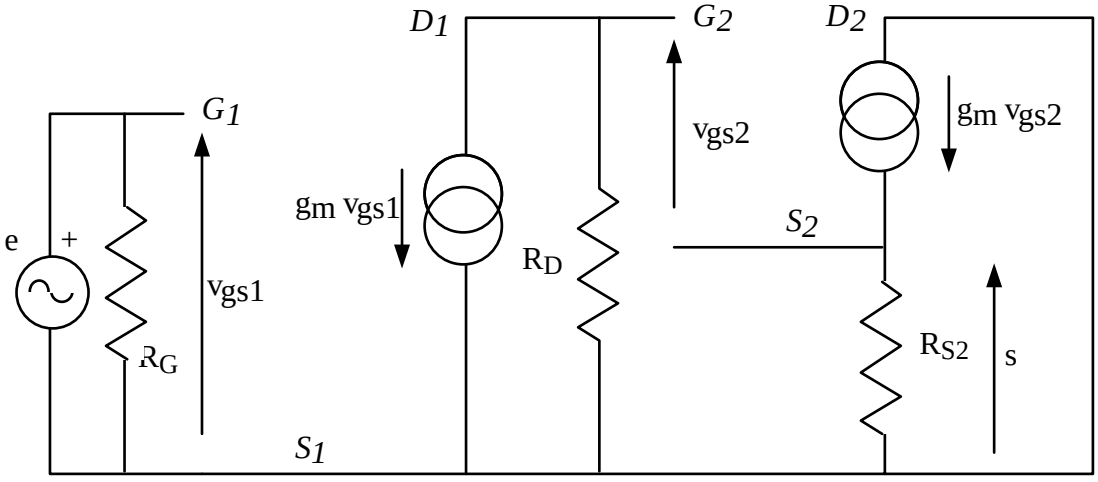
1.2.4. $V_{DS1} = V_{D1} - V_{S1}$ $\boxed{V_{DS1} = 8V}$

$V_{DS2} = V_{D2} - V_{S2}$ $\boxed{V_{DS2} = 8V}$

La tension V_{DS} de chaque transistor est supérieure à $-V_{GSoff}$: l'hypothèse du régime normal est légitime.

2.1. $\boxed{g_m = -2\frac{I_{DSS}}{V_{GSoff}}(1 - \frac{V_{GS}}{V_{GSoff}})}$ $\boxed{g_{m1} = g_{m2} = 2\ mS}$

2.2.



2.3. $s = R_{S2}\, g_m\, v_{gs2}$ $v_{gs2} = -\, g_m\, v_{gs1}\, R_D - s$ $v_{gs1} = e$ $\boxed{\frac{s}{e} = -\frac{g_m R_D}{1 + 1/g_m R_{S2}} = -9{,}2}$

2.4. $\boxed{R_e = R_G = 1M\Omega}$

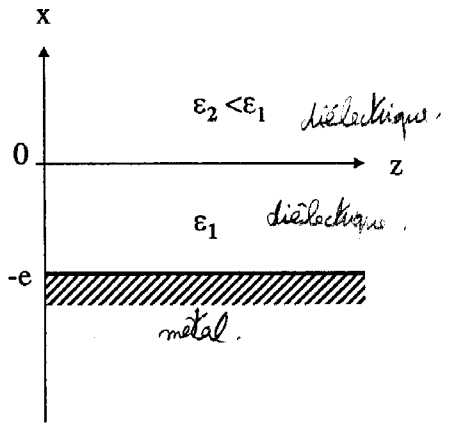
AP/20/01/2007

Institut National des télécommunications
PG12 - Contrôle de connaissances *18/04/2006*

Durée : 1h30

Eléments autorisés : calculatrice , polycopiés « PG12 cours + exercices » & « PG12 exercices corrigés »

Enoncé : On considère une couche diélectrique d'épaisseur e, de permittivité ε_1 recouvrant un plan métallique infiniment conducteur surmonté d'une couche diélectrique de permittivité relative ε_2 avec $\varepsilon_2<\varepsilon_1$. On recherche les modes guidés de type TE susceptibles de se propager suivant la direction Oz.



On rappelle les points fondamentaux suivants :

- Toutes les composantes de champ s'écrivent sous la forme $\overline{U}(x,y,z,t) = U(x)\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}$ avec β la constante de propagation des ondes dans la structure considérée. Il s'agit bien entendu de l'inconnue du problème.
- Toutes les composantes du champ électromagnétique s'expriment comme une combinaison linéaire de la seule composante H_z (mode TE). Plus précisément (cf. cours),

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{j\omega\mu_0}{\omega^2\mu_0\varepsilon_i - \beta^2}\dfrac{\partial H_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} -\dfrac{j\beta}{\omega^2\mu_0\varepsilon_i - \beta^2}\dfrac{\partial H_z}{\partial x} \\ 0 \\ H_z \end{pmatrix}$$

- Toutes les composantes du champ électromagnétique sont solution dans chacun des deux milieux de l'équation d'Helmoltz :

$\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \chi_i^2 S = 0$ avec $S=H_z$ pour les modes TE

$$\text{et } \chi_i^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_i - \beta^2 = k_0^2 n_i^2 - \beta^2$$

- Du fait de l'apparition d'un courant surfacique à l'interface métal / diélectrique 1, seules les composantes normales de $\vec{H}$ sont continues.

Questions :

1) Résoudre les équations et donner l'expression de S dans chacun des milieux
2) Ecrire les relations de continuités sur les interfaces
3) Déduire la relation vérifiée par β pour qu'il existe une solution autre que la solution nulle
4) On pose

$$X = \frac{2\pi e}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_1 - \left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2} \qquad Y = \frac{2\pi e}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2 - \varepsilon_2}$$

Montrer que l'équation de dispersion est de la forme

$$Y = -\frac{X}{\tan(X)}$$

5) Après avoir calculé $X^2 + Y^2$ proposez une méthode graphique pour résoudre l'équation de dispersion
6) A partir de la question 4, relier l'épaisseur normalisée $d = \frac{2\pi e}{\lambda}$ au paramètre $\alpha = \frac{\beta}{k_0}$. On donne ε_1=2.25, ε_2=1, e=1μm. Quelle est la longueur d'onde de coupure du mode fondamental.
7) Pour la même épaisseur, combien de modes TE existent à λ=1.4μm. Quelles sont les constantes de propagation de ces modes ?

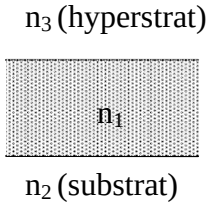
Contrôle PG12 – 1ère session
Durée : 1h30

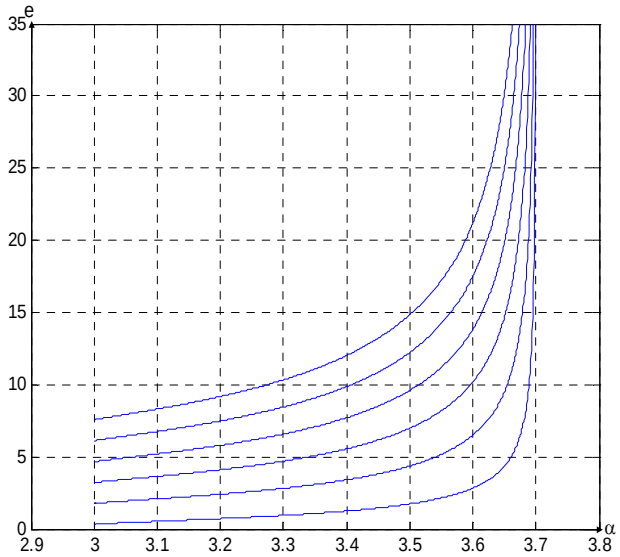
Les documents (polycopiés) et calculatrices sont autorisés.

Instructions : Afin de faciliter la correction, il vous est demandé de remettre sur des copies distinctes la première et deuxième partie. N'oubliez pas d'indiquer sur chaque copie (en haut à gauche) votre nom et prénom. Encadrez vos résultats s.v.p.

Première partie :

Exercice 1 : Diagramme de dispersion.





Guide plan et diagramme de dispersion (TE) associé

Dans la suite, on suppose que n1>n2>n3

1.1 En vous aidant du diagramme de dispersion, déterminez les indices n1 (cœur) et n2 (substrat) employés pour ces simulations. Justifiez votre réponse.

1.2 A la coupure, l'épaisseur normalisée du mode fondamental vaut e_0=0.27924. Quel est alors l'indice n_3 du superstrat.

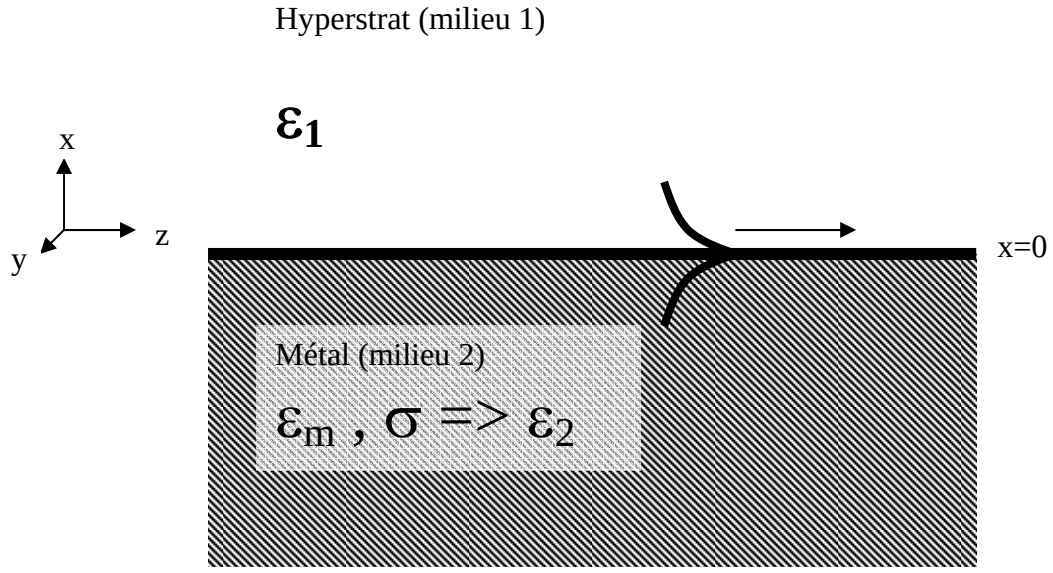
1.3 L'épaisseur du cœur du guide est de 1µm. Expliquez la démarche permettant de calculer le domaine de longueurs d'onde pour lequel le guide est monomode en polarisation TE. Faites l'application numérique ?

Exercice 2 : Ondes de surface

Dans cet exercice on cherche à déterminer si des modes guidés sont susceptibles d'exister à la surface d'un métal homogène non magnétique ($\mu=\mu_0$) et non parfait occupant l'espace x<0. Il vous est naturellement proposé de suivre la démarche employée au cours des BE d'optique guidée.

Les calculs se feront en polarisation TM. Pour cet état de polarisation, on peut montrer que la composante du champ Ey est nulle en tout point de l'espace. Toutes les composantes des champs comporteront le terme $e^{j(\omega t-\beta z)}$. Du fait de l'invariance du problème par toute translation suivant l'axe y, il est clair que $\frac{\partial}{\partial y} = 0$

On appellera $\vec{E}^{(i)}$ et $\vec{H}^{(i)}$ les champs dans le milieu i (i=1,2).



Les deux premières équations de Maxwell dans un métal non magnétique en régime harmonique sont :

$rot\ (\vec{E}^{(2)}) + i\omega\mu_0\vec{H}^{(2)} = \vec{0}$ **(1)**

$rot(\vec{H}^{(2)}) - i\omega\varepsilon_m\vec{E}^{(2)} - \vec{j} = \vec{0}$ **(2)** avec $\vec{j} = \sigma\vec{E}^{(2)}$. ε_m est la permittivité associée au métal et σ sa conductivité.

2.1 Montrer que dans le métal, l'équation (2) peut se rapporter à une équation de Maxwell **(2')** identique à celle d'un diélectrique à condition d'introduire une permittivité ε_2 que vous définirez (qui dépend de ε_m, ω et σ).

2.2 Grâce à un développement des équations (1) et (2'), et l'utilisation de la continuité des composantes tangentielles de $\vec{E}$ et $\vec{H}$, montrez que

$\frac{1}{\varepsilon_i}\frac{\partial Hy}{\partial x}$ et H_y sont continus à la traversée métal/hyperstrat.

2.3 En utilisant la relation $rot(rot(\vec{H}) = grad(div(\vec{H})) - \nabla^2\vec{H}$ et div(H)=0, exprimez l'équation différentielle que vérifie $H_y^{(i)}$ (introduire $\chi_i^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_i - \beta^2$ avec β la constante de propagation) dans chaque milieu

2.4 Résolvez l'équation différentielle trouvée en 2.3. Pour cela introduisez α_i dans chaque milieu. Par définition $\alpha_i \equiv \sqrt{\chi_i^2}$ avec α_i choisi de façon à avoir $Im(\alpha_i)>0$ (β sera à priori considéré comme complexe). Parmi les solutions générales, précisez dans chacun des milieux la forme des solutions permettant l'existence d'une onde guidée au voisinage de l'interface métal/hyperstrat.

2.5 On recherche les modes guidés dans une fenêtre spectrale située dans l'infrarouge. On peut alors négliger la partie réelle de ε_2 devant sa partie imaginaire. En utilisant (2.4) et (2.2), déterminez analytiquement β, solution des modes guidés.

Deuxième partie :

A faire sur une copie séparée

Exercice n°1

Considérons une ligne de transmission sans pertes, d'une longueur « d » égale au quart de la longueur d'onde spatiale et d'impédance caractéristique Z_0. Cette ligne est un transformateur d'impédance. Ce transformateur doit « adapter » une charge de 150Ω à une ligne représentant une impédance de 300Ω (voir figure 1). Déterminer l'impédance caractéristique Z_0 ainsi que le coefficient de réflexion sur la charge.

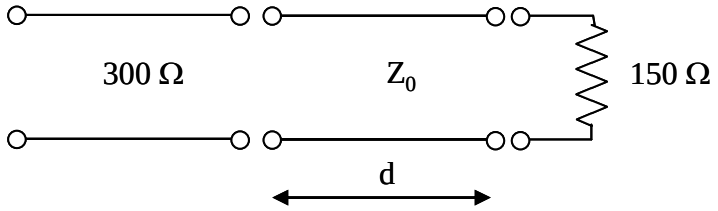


Figure 1

Exercice n°2

Soit une ligne de transmission sans pertes de 10 mètres de longueur d'impédance caractéristique 50Ω chargée par une impédance $Z_L = (100 + j50)\Omega$. Cette ligne est connectée à un générateur de fem 100 V et d'impédance interne Z_s égale à 50Ω (voir figure 2).

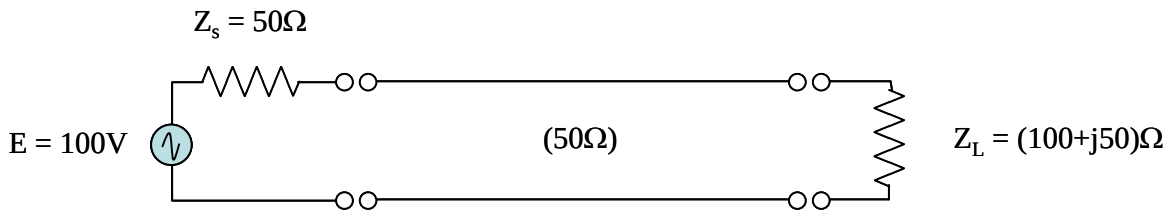


Figure 2

En considérant que la vitesse de phase du signal est de 200 m/µs à 26 MHz, déterminer l'impédance vue par le générateur à l'entrée de la ligne. Donner la puissance alors transmise à la charge.

Exercice n°3

Soit une ligne idéale de longueur l

1) a partir de l'expression générale de la tension et du courant sur cette ligne, lorsqu'elle est terminée par une charge, établir l'expression du coefficient de réflexion en tout point de la ligne, en fonction du coefficient de réflexion en bout de ligne (au niveau de la charge), de la constante de propagation β, et de la longueur de la ligne l.

2) en partant de la définition de l'impédance en un point quelconque de la ligne (en fonction de la tension et du courant), établir l'expression de cette impédance en fonction du coefficient de réflexion et de l'impédance caractéristique de la ligne Z_c.

3) en déduire que l'impédance en tout point de la ligne est imaginaire pure ou nulle, si la ligne est chargée par un court circuit.

Institut National des télécommunications
PG12 - Contrôle de connaissances – 2ème session *08/06/2006*
Durée : 1h30
Eléments autorisés : calculatrice , polycopiés « PG12 cours + exercices » & « PG12 exercices corrigés »

Exercice 1 :
On souhaite utiliser un câble coaxial en mode fondamental.
1.1 Quel est ce mode ?
1.2 Quelle est sa fréquence de coupure ?
1.3 Si le matériau diélectrique utilisé est du Téflon de permittivité relative 2,12 et la fréquence de travail 1 GHz, quelle est la longueur d'onde guidée du mode fondamental ?
1.4 Que doit-on connaître pour être certain d'utiliser ce câble en mode fondamental à la fréquence de travail choisie ?

Exercice 2 :
On considère un générateur d'impédance interne réelle Rg = 50Ω, qui alimente une charge d'impédance d'entrée Za = (65 + j 10) Ω par l'intermédiaire d'un câble d'impédance caractéristique réelle R_0= 75 Ω de longueur L (suivant l'axe x). Le câble est supposé sans pertes.
2.1 Quelle est la valeur du rapport d'onde stationnaire S sur le câble ?
2.2 Quelle est la proportion de la puissance incidente se propageant sur le câble qui n'est pas transmise à la charge (l'exprimer en pourcentage) ?
2.3 A partir de l'expression générale de la tension et du courant (fonction de Vi et Vr respectivement la tension incidente et réflechie en x=0) sur une ligne à constantes réparties, exprimer sous forme littérale la tension et le courant le long du câble, en fonction de β, L, R_o, V_i, et Γ_a (coefficient de réflexion de l'impédance d'entrée de l'antenne par rapport à l'impédance caractéristique du câble).

Exercice 3 :
On cherche à exprimer l'équation de dispersion associée aux modes TM se propageant dans une fibre optique d'indice de cœur n_1 et d'indice de gaine n_2. On vous rappelle quelques points généraux qui ont été démontrés en BE (cf. polycopié pour plus de détails):

$$E_{r_i} = -\frac{j}{\omega^2\mu_0\varepsilon_i - \beta^2}\left(\beta\frac{\partial E_{z_i}}{\partial r} + \frac{\omega\mu_0}{r}\frac{\partial H_{z_i}}{\partial \varphi}\right) \quad E_{\varphi_i} = \frac{j}{\omega^2\mu_0\varepsilon_i - \beta^2}\left(-\frac{\beta}{r}\frac{\partial E_{z_i}}{\partial \varphi} + \omega\mu_0\frac{\partial H_{z_i}}{\partial r}\right)$$

et

$$H_{r_i} = -\frac{j}{\omega^2\mu_0\varepsilon_i - \beta^2}\left(\beta\frac{\partial H_{z_i}}{\partial r} - \frac{\omega\varepsilon_i}{r}\frac{\partial E_{z_i}}{\partial \varphi}\right) \quad H_{\varphi_i} = \frac{j}{\omega^2\mu_0\varepsilon_i - \beta^2}\left(-\frac{\beta}{r}\frac{\partial H_{z_i}}{\partial \varphi} - \omega\varepsilon_i\frac{\partial E_{z_i}}{\partial r}\right)$$

On rappelle également que : $\chi_i^2 = \omega^2\varepsilon_i\mu_0 - \beta^2$ avec $\varepsilon_i = \varepsilon_0 n_i^2$

Les solutions de l'équation de propagation (méthode à séparation des variables) en faisant abstraction du terme $e^{j(\omega t - \beta z)}$ sont de la forme suivante :
$Ez(r,\varphi,z,t) = R(r)\cdot\phi(\varphi)\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}$ et $Hz(r,\varphi,z,t) = R'(r)\cdot\phi'(\varphi)\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}$

$$\begin{cases} Ez_1(r,\varphi) = A_1 J_\nu(u\frac{r}{a})\cdot\cos(\nu\varphi+\alpha) \\ Hz_1(r,\varphi) = A_1' J_\nu(u\frac{r}{a})\cdot\cos(\nu\varphi+\psi) \end{cases}$$ dans le cœur.

$$\begin{cases} Ez_2(r,\varphi) = A_2 K_\nu(w\frac{r}{a})\cdot\cos(\nu\varphi+\alpha) \\ Hz_2(r,\varphi) = A_2' K_\nu(w\frac{r}{a})\cdot\cos(\nu\varphi+\psi) \end{cases}$$ dans la gaine.

Avec J_ν et K_ν respectivement les fonctions de Bessel de première et seconde espèce d'ordre ν, ν un entier naturel, $u^2 = a^2\chi_1^2$, $w^2 = -a^2\chi_2^2$, a le rayon du cœur de la fibre

3.1 En coordonnées cylindriques, rappeler la relation définissant un mode TM et écrire les cinq relations de continuité vérifiées par **E** et **H**

3.2 En utilisant uniquement les relations de continuité faisant intervenir les composantes tangentielles de **E**, démontrer que les modes TM ne peuvent pas exister si $\nu \neq 0$.

3.3 En posant $\nu=0$, et en réécrivant les expressions des composantes longitudinales des champs, donner les relations de continuité tangentielles vérifiées par **E et H**.

3.4 Développer alors ces relations et en déduire la relation de dispersion vérifiée par les modes guidés TM.

Télécom INT - Tronc Commun - EI1

EXAMEN FINAL 1 DU MODULE RA12

2 Juin 2006 - Durée 1h30 - Aucun document autorisé. Calculettes interdites.

Remarque 1 : Les exercices sont indépendants.
Remarque 2 : Quel que soit l'exercice, donner l'expression littérale utilisée avant toute application numérique.

Exercice 1

Soit une antenne dont le diagramme de rayonnement, exprimé en densité de puissance rayonnée par unité d'angle solide, est de la forme :

$$U(\theta, \phi) = B_0 \sin^2 \theta$$

1.1 - De quel type est ce diagramme ? Quelles sont ses directions de rayonnement maximal ?
1.2 - Calculer la directivité de l'antenne (en valeur linéaire).
1.3 - Commenter l'ordre de grandeur de cette directivité.

Exercice 2

Le gain isotrope d'une antenne est-il :
- toujours supérieur ou égal à sa directivité ?
- toujours inférieur ou égal à sa directivité ?
- en général supérieur ou égal à sa directivité ?

Justifier.

Exercice 3

Soit une antenne à réflecteur parabolique, utilisée à 30GHz. Le diamètre du réflecteur est de 60cm. A partir de quelle distance un point peut-il être considéré comme étant situé en champ lointain de cette antenne ?

Exercice 4

Si une antenne de polarisation rectiligne reçoit une onde de polarisation circulaire, le facteur d'efficacité de polarisation est-il nul, égal à $1/\sqrt{2}$, ou égal à $1/2$? Justifier.

Exercice 5

Calculer l'atténuation d'espace libre à 20GHz, pour une liaison en visibilité de longueur 30km. On donnera cette valeur en dB, en utilisant le fait que $10 \log_{10}(4\pi) \approx 11$.

Exercice 6

En utilisant la notion de surface équivalente (ou effective) en réception d'une antenne, et la relation entre cette surface équivalente et le gain de l'antenne, démontrer la formule du bilan de liaison en espace libre et en visibilité (on commencera par exprimer la densité de puissance rayonnée par l'antenne d'émission au voisinage de l'antenne de réception). Les notations utilisées devront être explicitées.

Exercice 7

Expliquer ce que l'on entend par "atmosphère standard" et par "rayon de la Terre fictive" (ou "équivalente"). Quelle est l'utilité de cette dernière notion ?

Télécom INT - Tronc Commun - El1

EXAMEN FINAL 1 DU MODULE RA12

2 Juin 2006 - Durée 1h30 - Aucun document autorisé. Calculettes interdites.

Remarque 1 : Les exercices sont indépendants.
Remarque 2 : Quel que soit l'exercice, donner l'expression littérale utilisée avant toute application numérique.

4

Exercice 1

Soit une antenne dont le diagramme de rayonnement, exprimé en densité de puissance rayonnée par unité d'angle solide, est de la forme :

$$U(\theta, \phi) = B_0 \sin^2 \theta$$

1.1 - De quel type est ce diagramme ? Quelles sont ses directions de rayonnement maximal ?
1.2 - Calculer la directivité de l'antenne (en valeur linéaire).
1.3 - Commenter l'ordre de grandeur de cette directivité.

2

Exercice 2

Le gain isotrope d'une antenne est-il :
- toujours supérieur ou égal à sa directivité ?
- toujours inférieur ou égal à sa directivité ?
- en général supérieur ou égal à sa directivité ?

Justifier.

2

Exercice 3

Soit une antenne à réflecteur parabolique, utilisée à 30GHz. Le diamètre du réflecteur est de 60cm. A partir de quelle distance un point peut-il être considéré comme étant situé en champ lointain de cette antenne ?

2

Exercice 4

Si une antenne de polarisation rectiligne reçoit une onde de polarisation circulaire, le facteur d'efficacité de polarisation est-il nul, égal à $1/\sqrt{2}$, ou égal à $1/2$? Justifier.

3

Exercice 5

Calculer l'atténuation d'espace libre à 20GHz, pour une liaison en visibilité de longueur 30km. On donnera cette valeur en dB, en utilisant le fait que $10 \log_{10}(4\pi) \approx 11$.

4

Exercice 6

En utilisant la notion de surface équivalente (ou effective) en réception d'une antenne, et la relation entre cette surface équivalente et le gain de l'antenne, démontrer la formule du bilan de liaison en espace libre et en visibilité (on commencera par exprimer la densité de puissance rayonnée par l'antenne d'émission au voisinage de l'antenne de réception). Les notations utilisées devront être explicitées.

3

Exercice 7

Expliquer ce que l'on entend par "atmosphère standard" et par "rayon de la Terre fictive" (ou "équivalente"). Quelle est l'utilité de cette dernière notion ?

RA 12 - Exam. 1 - 2/6 / 2006.

Ex1 : (sur 4)

1.1. Omnidirectionnel.

$\theta = \frac{\pi}{2}$, $\forall \varphi$. $\Rightarrow$ plan xOy.

1.2. $D = \dfrac{U_{max}}{P_{tot\,ray} / 4\pi}$

$U_{max} = B_0$.

$$P_{tot\,ray} = B_0 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^2\theta \, \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= 2\pi B_0 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$= 2\pi B_0 \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi}$$

$$= 2\pi B_0 \left[1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right]$$

$$= 2\pi B_0 \times \frac{4}{3}$$

$$= \frac{8\pi}{3} B_0$$

$$D = \frac{B_0 \times 4\pi}{\frac{8\pi}{3} B_0} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

1.3. faible — logique pour diagramme omnidirectionnel.

Ex2 (sur 2) toujours : $G_{iso} \leq D$ car $G_{iso} = k_{eff} D$

et $k_{eff} = \dfrac{P_{tot\,ray}}{P_{alim}} \leq 1$

Ex3 (sur 2) $r = \frac{2D^2}{\lambda}$

$\lambda = \frac{c}{f}$.

AN : $\lambda = \frac{3\times 10^8}{30\times 10^9} = 10^{-2}$

$D = 60\times 10^{-2}$

$\Rightarrow r = \frac{2\times 60^2 \times 10^{-4}}{10^{-2}} = 2\times 36 = 72$ m

Ex4 1/2.

(sur 2) ant de polar rectilique : $\hat{f}(\hat{u}) = \cos\varphi\ \hat{u}_\theta + \sin\varphi\ \hat{u}_\varphi$

onde incidente de polar circulaire : $\hat{e}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{u}_\theta \pm j\hat{u}_\varphi)$.

$|\hat{f}(\hat{u})\cdot\hat{e}_i| = \frac{1}{\sqrt{2}}|\cos\varphi \pm j\sin\varphi| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\eta_p = |\hat{f}(\hat{u})\cdot\hat{e}_i|^2 = \frac{1}{2}$.

Ex5 (sur 3) $A_d = \left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right)^2$

AN. $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times 10^8}{20\times 10^9}$

$r = 30\times 10^3$

$\Rightarrow \frac{4\pi r}{\lambda} = \frac{4\pi\times 30\times 10^3\times 20\times 10^9}{3\times 10^8}$

$= 4\pi\times 2\times 10^6$

$(A_d)_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right) = 20\left[\log_{10}(4\pi) + \log_{10}(2) + \log_{10}(10^6)\right]$

$= 2\times\left[10\log_{10}(4\pi) + 10\log_{10}(2) + 10\log_{10}(10^6)\right]$

$= 2\times[11 + 3 + 60]$

$= 2\times 74$

$= 148$ dB.

Ex 6 : (sur 4)



S_r → densité de puissance rayonnée au voisinage de l'antenne de réception.

$$G_e = \frac{(P_e)}{P_e/4\pi r^2} \Rightarrow P_e = \frac{P_e G_e}{4\pi r^2}$$

$P_r = (S_r)\, P_e$ ← surface équivalente en réception de l'antenne de réception

$$S_r = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r$$

$$P_r = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r \frac{P_e G_e}{4\pi r^2} = P_e G_e G_r \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2$$

Ex 7 : (sur 3) atmosphère standard = décroissance donnée de l'indice diél. de l'atmosphère en fonction de l'altitude, valable 80% du temps en climat tempéré.

rayon de la Terre fictive = rayon "ajusté" pour que la courbure de rayons rectilignes / Terre fictive soit égale à la courbure des rayons "physiques" / Terre réelle –

Permet de dimensionner les syst. (hauteur des antennes pour dégagement au-dessus de l'horizon ou des obstacles) avec des trajectoires de rayons rectilignes.

en atmosphère standard, le rayon de la Terre fictive vaut $\frac{4}{3} R_0$, où R_0 est le rayon de la Terre réelle.

Télécom INT - Tronc Commun - EI1

EXAMEN FINAL 2 DU MODULE RA12

31 Août 2006 - Durée 1h30 - Aucun document autorisé. Calculettes interdites.

Remarque 1 : Les exercices sont indépendants.
Remarque 2 : Quel que soit l'exercice, donner l'expression littérale utilisée avant toute application numérique.

Exercice 1

Soit une antenne dont le diagramme de rayonnement, exprimé en densité de puissance rayonnée par unité de surface, est de la forme :

$$P(r,\theta,\phi) = P_0 \frac{\cos^4\theta}{r^2}$$

pour θ compris entre 0 et $\pi/2$, et $P(r,\theta,\phi) = 0$ pour θ compris entre $\pi/2$ et π.
1.1 - De quel type est ce diagramme ? Quelles sont ses directions de zéros de rayonnement et de rayonnement maximal ? Indiquer son allure sur un schéma.
1.2 - Calculer la directivité de l'antenne (en valeur linéaire et en dB).
1.3 - Commenter l'ordre de grandeur de cette directivité.

Exercice 2

Soit une antenne sans pertes d'impédance d'entrée $Z_a = (50 + 10j)\Omega$. Cette antenne, de directivité 3dB, est alimentée par un générateur d'impédance interne réelle $R_g = 50\Omega$, de puissance disponible 10dBW.
2.1 - Calculer le facteur d'efficacité de l'antenne (arrondi à 10^{-2} près). Quel est le gain (en valeur linéaire) de l'antenne dans ce système d'émission ?
2.2 - Donner l'expression du niveau de champ créé à une distance r de ce système, dans la ou les direction(s) de rayonnement maximal de l'antenne. Calculer sa valeur approximative au mV/m près pour r =3km.

Exercice 3

Soit deux doublets électriques situés à l'origine, l'un parallèle à l'axe Ox, l'autre parallèle à l'axe Oy.
3.1 - Quel est le vecteur de polarisation du champ rayonné séparément par chacun de ces doublets dans la direction de l'axe Oz ? De quel type de polarisation s'agit-il ?
3.2 - Si l'on superpose les champs rayonnés par les deux doublets, parcourus avec des courants de même amplitude mais déphasés de $\pi/2$, quelle est la forme du vecteur de polarisation de l'onde rayonnée dans la direction de l'axe Oz ? De quel type de polarisation s'agit-il ?

Exercice 4

Enoncer le théorème de translation en explicitant les notions et notations utilisées.

Exercice 5

5.1 - Dans quel contexte est utilisée la notion d'ellipsoïde de Fresnel ? Que signifie "dégager l'ellipsoïde de Fresnel" ?
5.2 - Si l'on doit dégager l'ellipsoïde de Fresnel sur une liaison hertzienne utilisée dans 2 bandes de fréquences différentes, quelle est la bande de fréquence (bande la plus basse ou la plus haute en fréquence) qui imposera la contrainte la plus forte ? Justifier.

Télécom INT - Tronc Commun - EI1

EXAMEN FINAL 2 DU MODULE RA12

31 Août 2006 - Durée 1h30 - Aucun document autorisé. Calculettes interdites.

Remarque 1 : Les exercices sont indépendants.
Remarque 2 : Quel que soit l'exercice, donner l'expression littérale utilisée avant toute application numérique.

(5)

Exercice 1

Soit une antenne dont le diagramme de rayonnement, exprimé en densité de puissance rayonnée par unité de surface, est de la forme :

$$P(r,\theta,\phi) = P_0 \frac{\cos^4\theta}{r^2}$$

pour θ compris entre 0 et $\pi/2$, et $P(r,\theta,\phi) = 0$ pour θ compris entre $\pi/2$ et π.

1,5 1.1 - De quel type est ce diagramme ? Quelles sont ses directions de zéros de rayonnement et de rayonnement maximal ? Indiquer son allure sur un schéma.

3 1.2 - Calculer la directivité de l'antenne (en valeur linéaire et en dB).

0,5 1.3 - Commenter l'ordre de grandeur de cette directivité.

(5)

Exercice 2

Soit une antenne sans pertes d'impédance d'entrée $Z_a = (50 + 10j)\Omega$. Cette antenne, de directivité 3dB, est alimentée par un générateur d'impédance interne réelle $R_g = 50\Omega$, de puissance disponible 10dBW.

3 2.1 - Calculer le facteur d'efficacité de l'antenne (arrondi à 10^{-2} près). Quel est le gain (en valeur linéaire) de l'antenne dans ce système d'émission ?

2 2.2 - Donner l'expression du niveau de champ créé à une distance r de ce système, dans la ou les direction(s) de rayonnement maximal de l'antenne. Calculer sa valeur approximative au mV/m près pour r =3km.

(4)

Exercice 3

Soit deux doublets électriques situés à l'origine, l'un parallèle à l'axe Ox, l'autre parallèle à l'axe Oy.

2 3.1 - Quel est le vecteur de polarisation du champ rayonné séparément par chacun de ces doublets dans la direction de l'axe 0z ? De quel type de polarisation s'agit-il ?

2 3.2 - Si l'on superpose les champs rayonnés par les deux doublets, parcourus avec des courants de même amplitude mais déphasés de $\pi/2$, quelle est la forme du vecteur de polarisation de l'onde rayonnée dans la direction de l'axe 0z ? De quel type de polarisation s'agit-il ?

(2)

Exercice 4

Enoncer le théorème de translation en explicitant les notions et notations utilisées.

(4)

Exercice 5

2 5.1 - Dans quel contexte est utilisée la notion d'ellipsoïde de Fresnel ? Que signifie "dégager l'ellipsoïde de Fresnel" ?

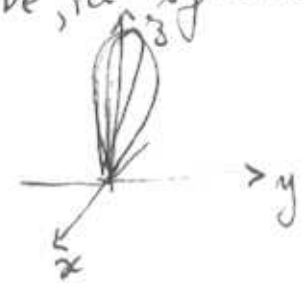
2 5.2 - Si l'on doit dégager l'ellipsoïde de Fresnel sur une liaison hertzienne utilisée dans 2 bandes de fréquences différentes, quelle est la bande de fréquence (bande la plus basse ou la plus haute en fréquence) qui imposera la contrainte la plus forte ? Justifier.

RA12_Exam2 - 31/8/2006

Ex1 :

1.1- rayonnement indépendant de φ.
direction de max. de rayonnement : $\theta = 0$ $(Oz, z \to +\infty)$
directions de zéro de rayonnement : $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\forall \varphi$.

→ une seule direction de rayonnement maximal
un seul lobe, rayonnement dans 1/2 espace des $z > 0$.
antenne directive, diagramme de symétrie cylindrique autour de Oz



1.2 - $D = \dfrac{P_{max}(r, \theta, \varphi)|_{r \text{ fixé}}}{P_{tot\,ray} / (4\pi r^2)}$.

$$P_{tot\,ray} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} P_0 \frac{\cos^4\theta}{r^2} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= 2\pi P_0 \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \sin\theta \, d\theta = 2\pi P_0 \left[-\frac{\cos^5\theta}{5} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2\pi P_0}{5}$$

$$D = \frac{P_0 / r^2}{\frac{2\pi P_0}{5} \times \frac{1}{4\pi r^2}} = 10 = 10 \text{ dB}$$

1.3 - directivité assez élevée, correspondant au fait que le diagramme ne possède qu'un lobe et qu'une direction de maximum de rayonnement.

Ex2

2.1- pas de pertes $\rightsquigarrow k_{eff} = 1 - |\Gamma|^2$

avec $\Gamma = \frac{Z_a - Z_g^*}{Z_a + Z_g}$; $G = k_{eff} \cdot D$

AN. $\Gamma = \frac{10j}{100 + 10j}$, $|\Gamma|^2 = \frac{100}{100^2 + 100} = \frac{1}{101} \approx 0,99 \times 10^{-2}$

$1 - |\Gamma|^2 \approx 0,99$

$D = 3\,dB = 2 \Rightarrow G = 1,98$

2.2- $G = \frac{E^2/2\eta}{P_{alim}/(4\pi r^2)} \Rightarrow E = \sqrt{\frac{G P_{alim} \times 2\eta}{4\pi r^2}}$

AN. $G = 1,98$; $P_{alim} = 10\,dB = 10$; $\eta = 120\pi$; $r = 3 \times 10^3$

$E = \sqrt{\frac{19,8 \times 240\pi}{4\pi \times 9 \times 10^6}} = \sqrt{2,2 \times 60} \times 10^{-3} = \sqrt{132} \times 10^{-3}$

$11\ mV/m < E < 12\ mV/m$

Ex3

3.1- $\hat{x}$ et $\hat{y}$ respectivement pour les doublets $//Ox$ et $//Oy$ → polars linéaires.

3.2- $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} \pm e^{j\frac{\pi}{2}} \hat{y}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} \pm j\hat{y}\right)$

↳ polar circulaire

Ex4

Si une antenne est translatée d'un vecteur $\vec{\delta}$, le champ qu'elle rayonne à grande distance ($> \frac{2|\vec{\delta}|^2}{\lambda}$) est multiplié par le terme de déphasage :

$$e^{j\vec{k}\cdot\vec{\delta}}$$

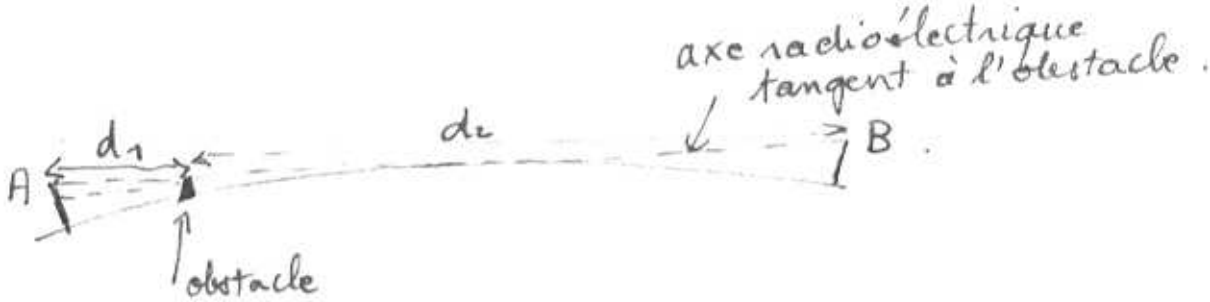
où $\vec{k} = k_0 \vec{u}_r$ est le vecteur d'onde dans la direction de rayonnement considérée ($k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide).

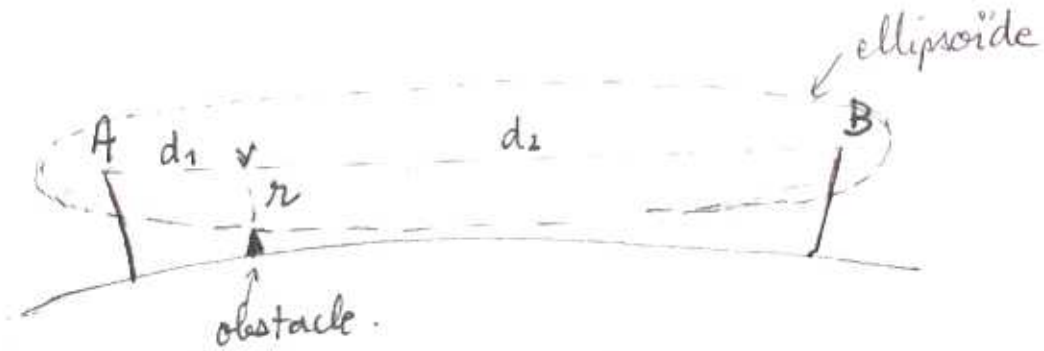
Ex5.

5.1. La notion d'ellipsoïde de Fresnel est utilisée dans le contexte de liaisons hertziennes terrestres point à point, en présence d'un obstacle diffractant sur le trajet entre les deux antennes servant à établir la liaison radio-électrique. [Elle s'utilise en atmosphère standard, au-dessus d'une Terre fictive de rayon $\frac{4}{3} R_0$ (R_0 = rayon de la Terre réelle), de façon à pouvoir considérer le trajet des ondes sur la liaison comme rectiligne (axe radio-électrique).]

L'ellipsoïde de Fresnel, pour une liaison entre les points A et B, à la longueur d'onde λ, est la surface constituée des points M tels que : $(AM+MB)-AB=\frac{\lambda}{2}$. A et B sont les foyers de cet ellipsoïde. [La différence de phase entre un trajet AM'B et le trajet direct AB est donc inférieure à π pour tout M' situé à l'intérieur de l'ellipsoïde. Si le sommet d'un obstacle pénètre à l'intérieur de l'ellipsoïde, il perturbera donc des trajets qui contribuent significativement au champ reçu, car leur contribution s'ajoute "presque en phase" avec celle du trajet direct.] "Dégager l'ellipsoïde de Fresnel" signifie le surélever suffisamment (en surélevant A et B) de façon à ce que le sommet de l'obstacle soit à l'extérieur de l'ellipsoïde.

Par rapport à la hauteur de A et B qui permet à l'axe radioélectrique d'être tangent au sommet de l'obstacle, pour dégager l'ellipsoïde de Fresnel il faut surélever A et B d'une hauteur supplémentaire égale au rayon de l'ellipsoïde dans le plan de l'obstacle (cf figure).





5.2. Le rayon de l'ellipsoïde de Fresnel à la distance d_1 de A et d_2 de B est : $r = \sqrt{\lambda \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}}$, où

λ est la longueur d'onde.

r est d'autant plus grand (pour une position d'obstacle fixée) que λ est grand, et donc f faible ($\lambda = \frac{c}{f}$, f = la fréquence, c = célérité des ondes). C'est donc la bande de fréquences la plus basse qui impose la contrainte la plus forte (A et B plus hauts).

Télécom INT - Tronc Commun - EI1

EXAMEN FINAL 1 DU MODULE RA12

12 Juin 2007 - Durée 1h30 - Aucun document autorisé. Calculettes interdites.

Remarque 1 : Les exercices sont indépendants.
Remarque 2 : Quel que soit l'exercice, donner l'expression littérale utilisée **avant** toute application numérique.

Exercice 1

1.1 - Donner la formule du potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ au point repéré par $\vec{r}$, en fonction des (densités de) courants électriques sources $\vec{J}(\vec{r}')$ parcourant une antenne (les points de l'antenne sont repérés par les vecteurs $\vec{r}'$).
1.2 - En utilisant les approximations champ lointain qui conviennent (et que l'on explicitera), donner l'expression de ce potentiel vecteur à grande distance des sources de courants (on vérifiera qu'il s'agit du produit d'une onde sphérique centrée sur l'origine et d'un terme dépendant de la distribution des courants sources).
1.3 - Donner la formule du champ lointain $\vec{E}(\vec{r})$ en fonction du potentiel vecteur.
1.4 - Enoncer le théorème de translation.
1.5 - Démontrer ce théorème en se servant des questions 1.2 et 1.3.

Exercice 2

Est-il possible pour une antenne d'avoir un gain négatif lorsqu'il est exprimé en dB ? Justifier.

Exercice 3

Soit une antenne de type parabole de diamètre $D = 50$cm. Elle est utilisée à 12GHz, avec une efficacité k_{eff} de 75 % et une puissance d'alimentation P_a de 3dBW. Son intensité de rayonnement maximale vaut alors $(100/\pi)$W/stéradian.
3.1 - Calculer sa directivité et son gain isotrope, en dB. On donnera les formules littérales, et on utilisera le fait que $10\log_{10}(3) \approx 4,8$ pour les applications numériques.
3.2 - Quelle est la distance minimale à partir de laquelle on peut considérer que l'antenne rayonne "en champ lointain" ? Faire l'application numérique.
3.3 - Le niveau de lobes secondaires de cette antenne est $SLL = -20$dB. Quel est la valeur du gain de l'antenne dans les directions du maximum de ses lobes secondaires ?

Exercice 4

On souhaite réaliser une liaison hertzienne de longueur $2d = 50$km à la fréquence de 6GHz. Le seul obstacle se trouvant sur le parcours se situe à $d_1 = 10$km de l'une des antennes, et sa hauteur est de $H = 60$m. On cherche à déterminer quelle doit être la hauteur h des pylônes supportant les antennes (les 2 pylônes sont pris de même hauteur) pour que l'influence de l'obstacle sur le bilan de liaison puisse être considérée comme négligeable en atmosphère standard.

4.1 - Indiquer quelles sont les deux phases successives du calcul à effectuer pour résoudre ce problème.
4.2 - Faire un schéma et indiquer sur ce schéma les notations qui seront utilisées dans la suite. Indiquer quelle valeur sera utilisée pour le rayon de la Terre R, et pourquoi. On rappelle que le rayon de la Terre (réelle) est $R_0 = 6400$km.
4.3 - Faire de façon littérale les calculs permettant de calculer h. Utiliser les approximations dues aux rapports d'échelle entre les différentes distances et hauteurs.
4.4 - Faire l'application numérique. On donnera les valeurs numériques de la longueur d'onde λ, du rayon de l'ellipsoïde de Fresnel utilisé, de la hauteur de pylône h_1 nécessaire pour dégager l'axe radioélectrique et de la hauteur de pylône demandée, h.

Corrigé du CF1 - RA12
du 12/6/2007

Exercice 1 :

1.1. $\vec{A}(\vec{r}) = \int_{\text{sources}} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jk\|\vec{r}-\vec{r}'\|}}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} d\vec{r}'$

1.2. $\|\vec{r}-\vec{r}'\| \approx r - \hat{r}.\vec{r}'$ (au dénominateur, on peut négliger le terme d'ordre 1 $\rightsquigarrow \|\vec{r}-\vec{r}'\| \approx r$.

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{\text{sources}} \vec{J}(\vec{r}') e^{jk\hat{r}.\vec{r}'} d\vec{r}'$$

1.3. $\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu \vec{A}_\perp(\vec{r})$ où $\vec{A}_\perp(\vec{r})$ est la composante de $\vec{A}(\vec{r})$ orthogonale à $\vec{r}$.

1.4. Si $\vec{E}_0(\vec{r})$ est le champ rayonné par un ensemble de sources et si cet ensemble de sources est translaté du vecteur $\vec{\delta}$, alors le champ rayonné par les sources translatées est : $\vec{E}_0(\vec{r}) e^{j\vec{k}.\vec{\delta}}$

1.5. Si on indice par $\vec{\delta}$ les grandeurs relatives au cas "translaté", alors en champ lointain :

$$\vec{A}_{\vec{\delta}}(\vec{r}) \approx \frac{e^{-jkr}}{r} \int \vec{J}_{\vec{\delta}}(\vec{r}'+\vec{\delta}) e^{jk\hat{r}.(\vec{r}+\vec{\delta})} d\vec{r}'$$

et $\vec{J}_{\vec{\delta}}(\vec{r}'+\vec{\delta}) = \vec{J}(\vec{r}')$

$$\Rightarrow \vec{A}_{\vec{\delta}}(\vec{r}) = \frac{e^{-jkr}}{r} \int \vec{J}(\vec{r}') e^{jk\hat{r}.\vec{r}'} d\vec{r}' \cdot e^{jk\hat{r}.\vec{\delta}}$$

$$= \vec{A}(\vec{r}) e^{j\vec{k}.\vec{\delta}}$$

$$\Rightarrow \vec{A}_{\vec{\delta}\perp}(\vec{r}) = \vec{A}_\perp(\vec{r}) e^{j\vec{k}.\vec{\delta}} \Rightarrow \vec{E}_{\vec{\delta}}(\vec{r}) = \vec{E}_{\vec{\delta}}(\vec{r}) e^{j\vec{k}.\vec{\delta}}$$

CQFD

Exercice 2 : Dans le cas (usuel) du gain isotrope :

$G = k_{eff} D$ où D est la directivité et k_{eff} le facteur d'efficacité de l'antenne. k_{eff} peut être très faible (ou même nul, à la limite), par exemple si l'antenne est très désadaptée, ou dissipative.

$G_{dB} = 10 \log_{10} G = 10 \log_{10} k_{eff} + D_{dB}$.

Il suffit que $10 \log_{10} k_{eff} < - D_{dB}$ pour avoir un gain négatif.

Exercice 3 : 3.1 $G = \frac{U_{max}}{P_a / 4\pi}$, $D = \frac{U_{max}}{P_r / 4\pi}$ avec P_r la puissance rayonnée — $P_r = \frac{P_a}{k_{eff}}$.

AN. $U_{max} = \frac{100}{\pi}$, $P_a = 3\,dBW = 2 \Rightarrow G = \frac{100/\pi}{2/4\pi} = 200$

$G_{dB} = 10 \log_{10} 200 = 10 \log_{10} 2 + 10 \log_{10}(100) = 23\,dB$.

$D = 0{,}75 \times G = 150$ $D_{dB} = 10 \log_{10} \frac{3}{2} \times 100 \simeq 4{,}8 - 3 + 20 = 21{,}8\,dB$

3.2. $\frac{2D^2}{\lambda}$. AN. $D = 0{,}5\,m$ $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{12 \times 10^9} = 2{,}5\,cm$

$\frac{2D^2}{\lambda} = \frac{2 \times 0{,}25}{2{,}5 \times 10^{-2}} = 20\,m$.

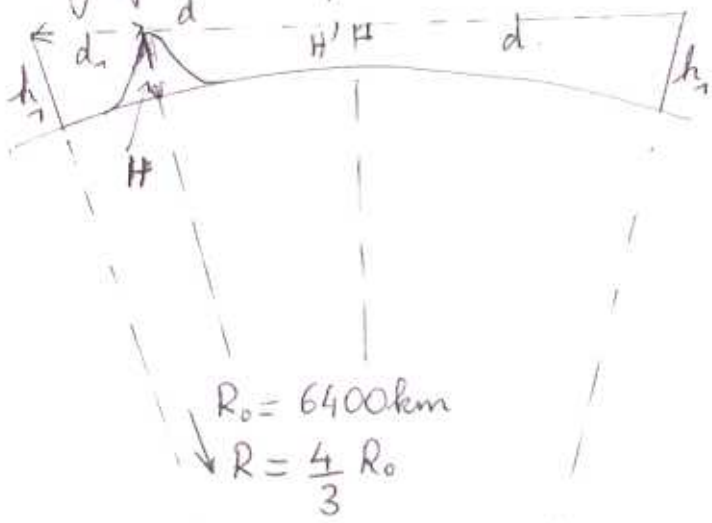
3.3 $G_{SLL_{dB}} = \underset{\uparrow (max)}{G_{dB}} - 20 = 3\,dB$.

Exercice 4:

4.1 - ① Dégager l'axe radioélectrique (↝ tangent au sommet de l'obstacle)

② Dégager l'ellipsoïde de Fresnel.

4.2 -



Dans la mesure où on suppose le trajet des ondes rectilignes, on doit prendre comme rayon R le rayon de la Terre fictive. En atmosphère standard : $R = \frac{4}{3} R_0$

4.3 $(R+h_1)^2 = d^2 + H'^2$

$(R+H)^2 = (d-d_1)^2 + H'^2$

$\Rightarrow (R+h_1)^2 - (R+H)^2 = d^2 - (d-d_1)^2$

$2R(h_1 - H) = 2dd_1 - d_1^2 = d_1(2d - d_1)$

(On a négligé h_1^2 et H^2 >. Rh_1 et RH).

$$h_1 = \frac{d_1(2d-d_1)}{2R} + H$$

← hauteur des pylônes pour dégager l'axe radioélectrique.

4.3 (suite).

Pour dégager l'ellipsoïde de Fresnel, l'axe radioélectrique doit passer à une hauteur r au-dessus de l'obstacle, où r est le rayon de l'ellipsoïde de Fresnel dans le plan de l'obstacle.

$$r = \sqrt{\lambda \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}} \qquad \text{avec } d_2 = 2d - d_1$$

$$r = \sqrt{\lambda \frac{d_1(2d - d_1)}{2d}}$$

Pour calculer h on peut utiliser la même formule que pour h_1, mais en remplaçant H par $H + r$, d'où : $h = h_1 + r$.

4.4. AN. $d_1 = 10 \times 10^3$; $2d = 50 \times 10^3$; $R = \frac{4}{3} \times 6400 \times 10^3$; $H = 60$

$$h_1 = \frac{10 \times 40}{2 \times \frac{4}{3} \times 6{,}4} + 60 = \frac{750}{32} + 60 \simeq 23{,}4 + 60 = 83{,}4 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{6 \times 10^9} = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$r = \sqrt{\lambda \frac{d_1(2d - d_1)}{2d}} = \sqrt{5 \times 10^{-2} \frac{10 \times 40 \times 10^6}{50 \times 10^3}} = \sqrt{400} = 20 \text{ m}$$

$$h = h_1 + r = 83{,}4 + 20 = 103{,}4 \text{ m}.$$

TELECOM SudParis - Tronc Commun - EI1

EXAMEN FINAL 1 DU MODULE PHY3502 (RA12)

2 Avril 2008 - Durée 1h30 - Aucun document autorisé. Calculettes interdites.

Remarque 1 : Les exercices sont indépendants.
Remarque 2 : Quel que soit l'exercice, donner la (ou les) expression(s) littérale(s) permettant d'obtenir le résultat final **avant toute application numérique**.

Exercice 1

Soit un doublet électrique de longueur dz très petite par rapport à la longueur d'onde, placé à l'origine, parallèlement à l'axe z, parcouru par un courant uniforme d'amplitude complexe I.
1.1 - Donner la formule du potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ au point repéré par $\vec{r}$, en fonction du courant électrique parcourant le doublet.
1.2 - Donner la formule générale du champ lointain $\vec{E}(\vec{r})$ en fonction du potentiel vecteur. L'utiliser pour calculer le champ lointain rayonné par le doublet.
1.3 - En déduire la formule de la densité de puissance rayonnée par le doublet en champ lointain, d'abord par unité de surface, puis par unité d'angle solide.
1.4 - Calculer la directivité du doublet (en valeur linéaire).

Exercice 2

Après avoir rappelé les définitions de la directivité et du gain d'une antenne, démontrer la relation existant entre directivité et gain isotrope.

Exercice 3

On cherche à dimensionner une station d'émission qui doit établir une liaison (supposée en espace libre) de portée d =300m, à une longueur d'onde λ =3cm, avec une station de réception dont l'antenne a un gain G_r =3dB et dont le récepteur a un seuil de réception de P_S =0,1mW.
3.1 - Quelle condition doit vérifier la PIRE de cette station d'émission (la donner en expression logarithmique, en indiquant l'unité) ?
3.2 - On dispose d'un générateur de puissance disponible P_e =10W. Quel doit être le gain de l'antenne d'émission ? Quel type d'antenne peut-on choisir pour satisfaire à cette spécification ?

Exercice 4

On souhaite réaliser une liaison hertzienne de longueur $2d = 32$km. Le seul obstacle se trouvant sur le parcours se situe à mi-distance des antennes, et sa hauteur est $h_\circ = 44$m. La hauteur h_P des pylônes supportant les antennes (les 2 pylônes sont pris de même hauteur) est de 95m. Pour quelles valeurs de la longueur d'onde λ l'influence de l'obstacle sur le bilan de liaison peut-elle être considérée comme négligeable en atmosphère standard (établir l'expression littérale, puis faire l'application numérique) ? En déduire la valeur de la fréquence minimale des signaux qui pourront être transmis sur cette liaison sans être perturbés par l'obstacle.

Exercice 5 : Questions portant sur la conférence de S. Touchard

5.1 - Quel problème rencontré par les antennes passives cherche-t-on à résoudre avec les antennes actives ? Expliquer en quoi le principe des antennes actives résout ce problème.
5.2 - Citer les 3 grandes méthodes de mesure d'antennes. Quelle méthode préconiseriez-vous pour la mesure d'une grande antenne à fort dépointage ? Justifier.
5.3 - Commenter les photos d'antennes présentées au verso (types d'antennes et de technologies, bande de fréquence...).

TELECOM SudParis - Tronc Commun - EI1

EXAMEN FINAL 1 DU MODULE PHY3502 (RA12)

2 Avril 2008 - Durée 1h30 - Aucun document autorisé. Calculettes interdites.

Remarque 1 : Les exercices sont indépendants.
Remarque 2 : Quel que soit l'exercice, donner la (ou les) expression(s) littérale(s) permettant d'obtenir le résultat final **avant toute application numérique**.

Exercice 1

Soit un doublet électrique de longueur dz très petite par rapport à la longueur d'onde, placé à l'origine, parallèlement à l'axe z, parcouru par un courant uniforme d'amplitude complexe I.

1.1 - Donner la formule du potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ au point repéré par $\vec{r}$, en fonction du courant électrique parcourant le doublet.

1.2 - Donner la formule générale du champ lointain $\vec{E}(\vec{r})$ en fonction du potentiel vecteur. L'utiliser pour calculer le champ lointain rayonné par le doublet.

1.3 - En déduire la formule de la densité de puissance rayonnée par le doublet en champ lointain, d'abord par unité de surface, puis par unité d'angle solide.

1.4 - Calculer la directivité du doublet (en valeur linéaire).

Exercice 2

Après avoir rappelé les définitions de la directivité et du gain d'une antenne, démontrer la relation existant entre directivité et gain isotrope.

Exercice 3

On cherche à dimensionner une station d'émission qui doit établir une liaison (supposée en espace libre) de portée d =300m, à une longueur d'onde λ =3cm, avec une station de réception dont l'antenne a un gain G_r =3dB et dont le récepteur a un seuil de réception de P_S =0,1mW.

3.1 - Quelle condition doit vérifier la PIRE de cette station d'émission (la donner en expression logarithmique, en indiquant l'unité) ?

3.2 - On dispose d'un générateur de puissance disponible P_e =10W. Quel doit être le gain de l'antenne d'émission ? Quel type d'antenne peut-on choisir pour satisfaire à cette spécification ?

Exercice 4

On souhaite réaliser une liaison hertzienne de longueur $2d = 32$km. Le seul obstacle se trouvant sur le parcours se situe à mi-distance des antennes, et sa hauteur est $h_o = 44$m. La hauteur h_P des pylônes supportant les antennes (les 2 pylônes sont pris de même hauteur) est de 95m. Pour quelles valeurs de la longueur d'onde λ l'influence de l'obstacle sur le bilan de liaison peut-elle être considérée comme négligeable en atmosphère standard (établir l'expression littérale, puis faire l'application numérique) ? En déduire la valeur de la fréquence minimale des signaux qui pourront être transmis sur cette liaison sans être perturbés par l'obstacle.

Exercice 5 : Questions portant sur la conférence de S. Touchard

5.1 - Quel problème rencontré par les antennes passives cherche-t-on à résoudre avec les antennes actives ? Expliquer en quoi le principe des antennes actives résout ce problème.

5.2 - Citer les 3 grandes méthodes de mesure d'antennes. Quelle méthode préconiseriez-vous pour la mesure d'une grande antenne à fort dépointage ? Justifier.

5.3 - Commenter les photos d'antennes présentées au verso (types d'antennes et de technologies, bande de fréquence...).

Corrigé CF1 - PHY3502 (RA12) 2/4/2008

23

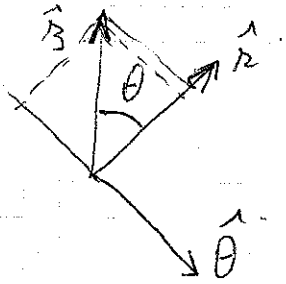
Ex 1. 10

(2) 1.1 - $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jk\|\vec{r}-\vec{r}'\|}}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} d\vec{r}'$ (cas général).

Doublet : $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} I \vec{z} \frac{e^{-jkr}}{r} dz$

(2,5) 1.2 - $\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu \vec{A}_{trans}(\vec{r})$

0,5 composante transverse de $\hat{\xi}(\gamma \cdot \vec{r})$: $-\hat{\theta}\sin\theta$



$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu \frac{1}{4\pi} I dz \frac{e^{-jkr}}{r} (-\sin\theta)\,\hat{\theta}$$

0,5 $$= j\frac{\omega\mu}{4\pi} I dz \frac{e^{-jkr}}{r} \sin\theta\,\hat{\theta}$$

0,5 et $\frac{\omega\mu}{4\pi} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{k}{4\pi}\eta_0 = \frac{2\pi}{\lambda \cdot 4\pi} 120\pi = \frac{60\pi}{\lambda}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = j\frac{60\pi}{\lambda} I dz \frac{e^{-jkr}}{r} \sin\theta\,\hat{\theta}$$

(2) 1.3 - Vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \frac{1}{2\eta}\|\vec{E}\|^2 \hat{r}$

densité de p. rayonnée / u. de surface en champ lointain :

$$\|\vec{\Pi}\| = \frac{1}{2\eta}\|\vec{E}\|^2 = \frac{1}{2\eta}\left(\frac{60\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{|I|^2 dz^2}{r^2} \sin^2\theta$$

0,5 $$= \frac{15\pi}{\lambda^2} \frac{|I|^2 dz^2}{r^2} \sin^2\theta$$

d. de puissance rayonnée / u. d'angle solide :

0,5 $U'(\theta,\varphi) = r^2 \|\vec{\Pi}(r,\theta,\varphi)\| = \frac{15\pi}{\lambda^2} |I|^2 dz^2 \sin^2\theta$

(2,5) 1.4 $D(\theta,\varphi) = \frac{U_{max}(\theta,\varphi)}{P_{tot\,ray}/4\pi}$

1,5 $P_{tot\,ray} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} U(\theta,\varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$= \frac{15\pi}{\lambda^2} |I|^2 dz^2 \times 2\pi \times \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta$

et $\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta) \sin\theta \, d\theta$

$= \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

1

$P_{tot\,ray} = \frac{15\pi}{\lambda^2} |I|^2 dz^2 \times 2\pi \times \frac{4}{3} = \frac{40\pi^2}{\lambda^2} |I|^2 dz^2$.

$D(\theta,\varphi) = \frac{\frac{15\pi}{\lambda^2} |I|^2 dz^2 \sin^2\theta}{\frac{40\pi^2}{\lambda^2} |I|^2 dz^2} \times 4\pi = \frac{3}{2} \sin^2\theta$

$D = D_{max}(\theta,\varphi) = \frac{3}{2}$ (pour $\sin^2\theta = 1 \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{2}$).

12

EX2 - $D = \frac{U_{max}}{P_{tot\,ray}/4\pi}$ et $G_{iso} = \frac{U_{max}}{P_{alim}/4\pi}$ → d. de puissance ray. par 1 source isotrope alimentée avec la m puissce

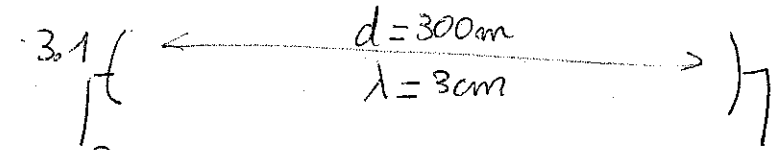
$\Rightarrow G_{iso} = \frac{P_{tot\,ray}}{P_{alim}} D$

↳ η_{eff} (facteur d'efficacité).

$\eta_{eff} = e_{cd}(1 - |\Gamma|^2)$.

14 EX3

3.1



1 $P_r = P_e \frac{G_e G_r}{A_{el}} = PIRE \frac{G_r}{\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2}$ car $PIRE = P_e G_e$. (0,5)

$P_r > P_s \Rightarrow PIRE > \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2 \frac{P_s}{G_r}$

0,5 en log : $PIRE_{dBW} > \underbrace{20\log_{10}\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)}_{A_{el}} - G_r(dB) + 10\log_{10} P_s(W)$

AN. $A_{el} = 20\log_{10}\left(\frac{4\pi \times 300}{3\times 10^{-2}}\right) = \underbrace{20\log_{10}(4\pi)}_{\approx 22} + \underbrace{20\log_{10}(10^4)}_{80} \approx 102\,dB$.

1 $P_s = 0,1\,mW = 10^{-4}\,W \Rightarrow P_{s(dBW)} = 10\log_{10}(10^{-4}) = -40\,dBW$ (0,5)

$PIRE > 102 - 3 - 40 = 59\ dBW$

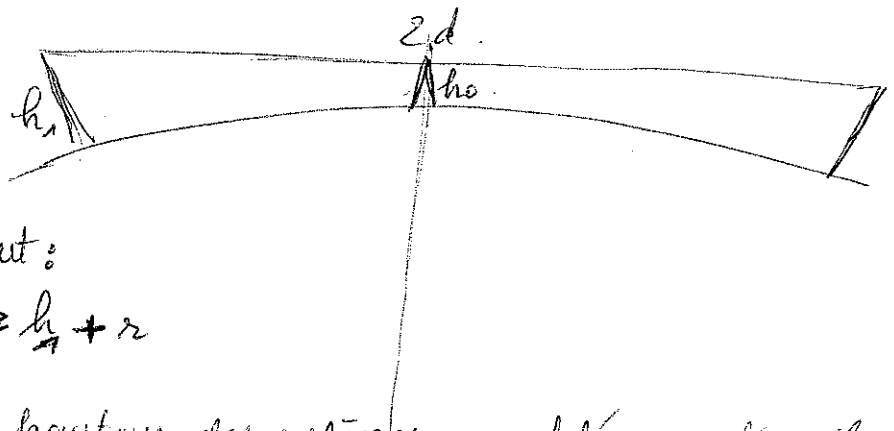
3.2. $PIRE_{dBW} = G_{e(dB)} + P_{e(dBW)} \Rightarrow G_{e(dB)} > PIRE_{dBW} - P_{e dBW}$ (0,5)

0,5 AN. $P_{e(dBW)} = 10\log_{10} 10 = 10\,dBW \Rightarrow G_{e(dB)} > 49\,dB$.

0,5 ant à réflecteurs - (~~ant.~~ grande ant. active)

5

EX4.



4

Il faut :

0,5 · $h_p \geq h_1 + r$

h_1 = hauteur des pylônes quand l'axe radio-électrique est tangent à l'obstacle.

r = rayon de l'ellipsoïde de Fresnel dans le plan de l'obstacle.

1 · $(h_1+R)^2 = (h_0+R)^2 + d^2$ où $R = \frac{4}{3} R_0$ (atmosphère standard)

$2h_1R \simeq 2h_0R + d^2$.

$h_1 = h_0 + \frac{d^2}{2R}$.

0,5 · $r = \sqrt{\frac{\lambda d_1 d_2}{d_1+d_2}}$ ici : $d_1 = d_2 = d \Rightarrow r = \sqrt{\lambda \frac{d^2}{2d}} = \sqrt{\frac{\lambda d}{2}}$

Il faut : $h_p \geq h_1 + \sqrt{\frac{\lambda d}{2}}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{\lambda d}{2}} \leq h_p - h_1$

1 $\lambda \leq (h_p - h_1)^2 \times \frac{2}{d}$.

AN. $d = 16 \times 10^3$ m.

$R = \frac{4}{3} \times 6400 \times 10^3$ m

$\frac{d^2}{2R} = \frac{16^2 \times 10^6 \times 3}{8 \times 64 \times 10^5} = \frac{10 \times 3}{2} = 15$ m

$h_0 = 44$ m $\Rightarrow h_1 = 44 + 15 = 59$ m.

0,5 · $\lambda \leq (95-59)^2 \times \frac{2}{16 \times 10^3} = \frac{36^2 \times 2}{16} \times 10^{-3} = 9^2 \times 2 \times 10^{-3} = 162 \times 10^{-3}$ m

$\lambda \leq 16{,}2$ cm.

0,5 $\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda}$. AN. $\lambda \leq 16{,}2 \times 10^{-3} = 2 \times 9^2 \times 10^{-3} \Rightarrow f \geq \frac{3 \times 10^8}{2 \times 9 \times 3 \times 3 \times 10^{-3}} = \frac{10^3}{54 \times 10^{-2}}$

)

(5)

$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda}$ $\quad \lambda \leq \lambda_{max} \Rightarrow f \geq f_{min} = \frac{c}{\lambda_{max}}$.

AN. $\lambda_{max} = 2 \times 9^2 \times 10^{-3}$ m. $\quad c = 3 \times 10^8$ m/s $\Bigg\}$ $f_{min} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 27 \times 3 \times 10^{-3}} = \frac{10^9}{54 \times 10^{-3}}$

1 $\frac{100}{54} = \frac{50}{27} = \frac{50}{25(1+\frac{2}{25})} \approx 2\left(1 - \frac{2}{25}\right) \approx 2(1 - 2 \times 0{,}04) = 2(1 - 0{,}08)$

$= 2 \times 0{,}92 = 1{,}84$.

$f_{min} \approx 1{,}84 \times 10^9$ Hz $= 1{,}84$ GHz.

Ex 5. 2

5.1 - La dissipation de puissance dans les lignes d'alimentation des éléments d'un réseau. En amplifiant au niveau de
0,5 chaque élément on réduit la dissipation ohmique, donc l'échauffement, tout en assurant un niveau suffisant pour le champ rayonné (à l'émission).

5.2. Mesures en chp lointain
en chp proche
en base compacte.

Une mesure en champ proche car :

1 - la distance en champ lointain serait importante ~~[illegible]~~
~> perturbations dues à l'environnement, l'humidité...
+ coût mécanique (rotation).
- la zone sourde d'une base compacte ne serait pas assez grande.
- une mesure champ proche permet de détecter les éléments
0,5 défectueux.

UV Signal et Communication

PS - SI

Caliente

INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
GROUPE DES ECOLES DE TELECOMMUNICATION
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module PS 11 : Probabilités (1ère partie)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (une page manuscrite A4 est autorisée)
Date : 24.11.2005
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année :

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même, si possible dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les trois exercices sont "indépendants".

1] **Loi de Poisson**

Le nombre de clients X dans une grande surface de distribution pendant une période donnée suit une loi de Poisson de paramètre λ. Dans cette grande surface, chaque client a la probabilité $p \in]0,1[$ de se faire voler son portefeuille. On note Y, le nombre de portefeuilles volés dans la période considérée dans cette grande surface. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

2] **Loi Binomiale**

Un laboratoire doit analyser n prélèvements pour déterminer ceux qui contiennent un corps C donné. On admet que pour un prélèvement quelconque, la probabilité qu'il contienne le corps C est π et l'on suppose que les prélèvements sont indépendants.

On répartit les prélèvements en a groupes d'effectifs b ($n = ab$) et pour chaque groupe, on constitue un mélange à l'aide de quantités égales de chacun des b prélèvements de ce groupe. Si ce mélange ne contient pas le corps C, une seule analyse aura établi qu'aucun des b prélèvements du groupe ne contient pas le corps C. Si ce mélange contient le corps C, il faut alors analyser séparément les b prélèvements pour déterminer ceux qui contiennent le corps C ; le nombre d'analyses faites pour le groupe est alors $b+1$.

On désigne par X, le nombre total d'analyses effectuées. Quels sont les valeurs possibles de X, en déterminer les probabilités. On pourra considérer la variable aléatoire intermédiaire $Y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{X-a}{b}$ en introduisant $p \stackrel{\text{def}}{=} 1-(1-\pi)^b$.

3] **Changement de variable aléatoire**

Soit la variable aléatoire bidimensionnelle (X,Y) continue dont la densité de probabilité est définie par :

$$f_{X,Y}(x,y) = \theta^2 e^{-\theta x} \mathbb{1}_{0<y<x}(x,y),$$

où $\mathbb{1}_A(x,y)$ désigne la fonction indicatrice ($\mathbb{1}_A(x,y) = 1$ si $(x,y) \in A$ et $\mathbb{1}_A(x,y) = 0$ ailleurs.
3.1] Déterminer les lois de probabilités des variables aléatoires marginales X et Y.
3.2] On définit $Z \stackrel{\text{def}}{=} Y/X$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.
3.3] Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire bidimensionnelle (X,Z). Les variables aléatoires X et Z sont elles indépendantes ?

Correction très succincte du premier contrôle de connaissance de PS11 (les références citées sont celles du résumé de cours du polycopié)

1] **Loi de Poisson**
D'après la formule des probabilités totales [I.7], en appelant les causes $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$, le nombre X de clients vaut i :

$$P(Y=k)=\sum_{i=0}^{+\infty}P(X=i)P(Y=k/X=i).$$

D'après la définition de la loi de Poisson : $P(X=i)=\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$. Et d'après l'interprétation de la probabilité conditionnelle :

$$P(Y=k/X=i)=\begin{cases}0 & \text{si } i<k\\ C_i^k p^k(1-p)^{i-k} & \text{si } i\geq k\end{cases}$$

En conséquence $P(Y=k)$ devient :

$$\begin{aligned}P(Y=k) &= \sum_{i=k}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\frac{i!}{k!(i-k)!}p^k(1-p)^{i-k}\\ &= \frac{\lambda^k p^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j(1-p)^j}{j!}=\frac{\lambda^k p^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p},\end{aligned}$$

soit une loi de probabilité de Poisson de paramètre λp. Ce résultat est similaire à celui obtenu dans l'exercice de TD II.4 Introduction au processus de Poisson homogène, à propos du processus d'effacement.

2] **Loi Binomiale**

Puisqu'il y a a groupes d'effectifs b et que pour chacun de ces groupes 1 ou $b+1$ analyses sont effectuées, le nombre X d'analyses prend les valeurs $\{a, a+b, a+2b, ...a+kb, ..., a+ab\}$, soit les valeurs $X=a+Yb$ avec $Y\in\{0,1,...,a\}$ où Y représente le nombre de mélanges qui contiendront le corps C. Nous avons donc affaire à une suite de a expériences de Bernoulli indépendantes où l'événement considéré est {contient le corps C} a une probabilité de $1-(1-\pi)^b$ que l'on note p. Par suite la variable aléatoire Y suit une loi de probabilité Binomiale de paramètre (a,p) avec $p\overset{\text{def}}{=}1-(1-\pi)^b$. Puis

$$P(X=a+kb)=C_a^k[1-(1-\pi)^b]^k(1-\pi)^{b(a-k)}\qquad\text{pour}\quad k=0,1,...,a.$$

3] **Changement de variable aléatoire**

D'après [II.15],

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dy=\left(\int_0^x\theta^2e^{-\theta x}dy\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)=\theta^2xe^{-\theta x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x),$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dx=\left(\int_y^{+\infty}\theta^2e^{-\theta x}dx\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)=\theta[-e^{-\theta x}]_y^{+\infty}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)=\theta e^{-\theta y}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

3.2] Par définition $Z\in]0,1[$ et sa fonction de répartition devient pour $z\in]0,1[$

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= P(Z<z)=P(Y<zX)=\iint_{\Delta_z}f_{X,Y}(x,y)dxdy\ \text{ avec } \Delta_z\overset{\text{def}}{=}\{(x,y),0<y\leq zx\}\\ &= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{zx}\theta^2e^{-\theta x}dy\right]dx=\int_0^{+\infty}\theta^2e^{-\theta x}zxdx=z\int_0^{+\infty}\underbrace{\theta^2xe^{-\theta x}}_{\text{d.d.p. de }X}\ dx=z.\end{aligned}$$

Par suite la variable aléatoire Z est distribuée selon une loi de probabilité uniforme sur $]0,1[$: $f_Z(z) = \mathbb{1}_{]0,1[}(z)$.
3.3] Puisque la relation entre (X,Y) et (X,Z) est bijective et que la variable aléatoire (X,Y) est continue, la relation [II.21a] s'applique et :

$$\begin{aligned} f_{X,Z}(x,z) &= |\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & x \end{pmatrix}| f_{X,Y}(x,y)_{|x=x,y=zx} \\ &= x\theta^2 e^{-\theta x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \mathbb{1}_{]0,1[}(z) \\ &= f_X(x) f_Z(z) \end{aligned}$$

Par suite les variable aléatoires X et Z sont indépendantes.

INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
GROUPE DES ECOLES DE TELECOMMUNICATION
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module PS 11 : Probabilités (1ère session)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (seule une page manuscrite A4 est autorisée)
Date : 24.11.2006
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année :

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même, si possible dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les trois exercices sont "indépendants".

1] **Modélisation d'expérience aléatoire : Compteur de particules inhibé**

Deux émetteurs de particules émettent chacun une particule pendant l'intervalle de temps $[0, t_0]$. On note T_1 et T_2, les instants respectifs d'émission des deux particules émises. Le compteur qui reçoit une particule à l'instant t est inhibé pendant l'intervalle de temps $[t, t+\tau]$ (ne compte plus aucune particule reçue pendant cette durée d'inhibition τ, τ étant une constante qui ne dépend que du compteur et $\tau < t_0$). On suppose que les deux particules sont émises "de façon indépendante" et "au hasard" vers le compteur.
1.1] Par quel espace probabilisé peut-on modéliser une telle expérience aléatoire ? Quel est l'événement {une particule n'est pas enregistrée} dans cet espace probabilisé ?
1.2] En déduire la probabilité qu'une particule ne soit pas enregistrée ?

2] **Probabilité d'événement, variable aléatoire**

La durée de vie X de chaque transistor qui équipe un étage d'un oscilloscope est modélisée par une variable aléatoire de densité de probabilité :

$$f_X(x) = \frac{a}{x^2} \mathbb{1}_{]a,\infty[}(x)$$

avec $a = 100$h et l'état de chacun des transistors qui équipe cet étage est indépendant de l'état des autres.

Quelle est la probabilité qu'aucun des 5 transistors qui équipe cet étage d'oscilloscope ne soit à remplacer durant les 250 premières heures de fonctionnement de l'appareil ?

3] **Changement de variable aléatoire**

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes de même loi de probabilité de densité de probabilité :

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

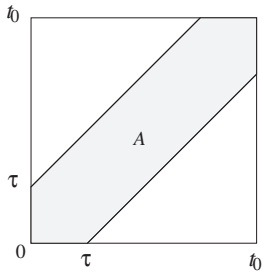
3.1] Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $Y \stackrel{\text{def}}{=} X_1^2$.

3.2] Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $Z \stackrel{\text{def}}{=} X_1^2 + X_2^2$. Préciser la loi de probabilité obtenue.

Correction succincte du contrôle de connaissance de PS11

1] **Modélisation d'expérience aléatoire : Compteur de particules inhibé**

1.1] L'expérience aléatoire est modélisée par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ avec $\Omega = [0, t_0] \times [0, t_0]$, $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des parties de Ω dont on sait définir des "surfaces" (les boréliens de Ω) et P est l'application probabilité uniforme sur Ω.



1.2] L'événement {une particule n'est pas enregistrée} est alors le domaine A hachuré de Ω. Par suite

$$P(A) = \frac{\text{Aire}(A)}{\text{Aire}(\Omega)} = \frac{t_0^2 - (t_0 - \tau)^2}{t_0^2} = \frac{2t_0\tau - \tau^2}{t_0^2} \approx \frac{2\tau}{t_0} \quad \text{pour } \tau \ll t_0$$

2] **Probabilité d'événement, variable aléatoire**

Désignons par $X_k, k = 1.., 5$, les durées de vie de chacun des 5 transistors. L'événement cherché est alors

$$\{\bigcap_{k=1}^{5} X_k > 250\}.$$

Par suite la probabilité cherchée P vaut grace à l'indépendance des variables aléatoires $X_k, k = 1.., 5$:

$$P = P(\bigcap_{k=1}^{5}\{X_k > 250\}) = \prod_{k=1}^{5} P(X_k > 250) = \left(\int_{250}^{+\infty} f_X(x)dx\right)^5 = \left(\int_{250}^{+\infty} \frac{a}{x^2}dx\right)^5 = \left(\frac{100}{250}\right)^5 \approx 0.01$$

3] **Changement de variable aléatoire**

3.1]

$$F_Y \stackrel{\text{def}}{=} P(Y < y) = P(X_1^2 < y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ P(\sqrt{y} < X_1 < \sqrt{y}) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

avec $P(\sqrt{y} < X_1 < \sqrt{y}) = 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$. Soit :

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{y}} . \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

3.2] Deux méthodes sont possibles: La première passe par la fonction de répartition de la variable aléatoire Z et la deuxième calcule directement le densité de probabilité de la variable aléatoire Z à l'aide du produit de convolution (rel. [II.23a]) des densités de probabilité de X_1^2 et X_2^2 obtenues à la question 3.1] car X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes.

$$F_Z \stackrel{\text{def}}{=} P(Z < z) = P(X_1^2 + X_2^2 < z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ P[(X_1, X_2) \in \Delta_z] & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

avec $\Delta_z \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2),\ x_1^2 + x_2^2 < z\}$. Soit grâce à l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2

$$
\begin{aligned}
P[(X_1, X_2) \in \Delta_z] &= \iint_{\Delta_z} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Delta_z} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \iint_{\Delta_z} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}} dx_1 dx_2 = \iint_{\Delta'_z} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr d\theta = \left[-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right]_0^{\sqrt{z}} = 1 - e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}.
\end{aligned}
$$

avec $\Delta'_z \stackrel{\text{def}}{=} \{(r, \theta),\ r > 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[\}$

Soit :

$$
f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z).
$$

Par suite Z est de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\sigma^2}$.

Ce résultat peut s'obtenir directement moyennant un petit calcul d'intégrale :

$$
f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_Y(z-y) dy = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{y(z-y)}} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} dy \right) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)
$$

avec

$$
\int_0^z \frac{1}{\sqrt{y(z-y)}} dy = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin u \cos u}{\sin u \cos u} du = \pi \qquad (\text{avec } t = \sin^2 u)
$$

Ce qui redonne $f_Z(z) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)$.

INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
GROUPE DES ECOLES DE TELECOMMUNICATION
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module PS 11 : Probabilités (2ème partie)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (deux pages manuscrites A4 sont autorisées)
Date : 24.2.2007
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année (1,2,3):

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même, si possible dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les deux exercices sont "indépendants". On rappelle la notation $\mathbb{1}_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$.

1] **Discrétisation de la loi de probabilité exponentielle, loi géométrique**

Soit une variable aléatoire X de loi exponentielle

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

1.1] Calculer $\mathrm{E}(X)$ et déterminer la fonction de répartition $F_X(x)$.
1.2] On associe à X, sa partie entière X_e et sa partie fractionnaire X_f définies par

$$X = X_e + X_f \qquad \text{avec } X_e \in \mathbb{N} \text{ et } X_f \in [0,1[.$$

Déterminer les probabilités $P(X_e = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, en déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X_e.
1.3] Calculer $\mathrm{E}(X_e)$ (on utilisera l'identité $\sum_{k=0}^{+\infty} kp^k = \frac{p}{(1-p)^2}$ pour $p \in]0,1[$). Comparer cette espérance mathématique à celle de la variable aléatoire X. Commentaire ? Que se passe t'il si $\lambda \ll 1$?
1.4] Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X_f. En déduire la densité de probabilité $f_{X_f}(x)$.
1.5] Démontrer que les variables aléatoires X_e et X_f sont indépendantes. (on utilisera pour critère d'indépendance dans le cas de 2 variables aléatoires X et Y où X est discrète entière et Y continue :

$$P[(X = k) \cap (Y < y] = P[X = k]P[Y < y], \ \forall\, k \in \mathbb{N}, \ \forall\, y \in \mathbb{R}$$

1.6] Soit $Y = uX$ avec u constante strictement positive. Démontrer que

$$\lim_{u \to \infty} P(Y_f \in [a,b[) = b - a, \quad \forall a, b \in [0,1]$$

(On commencera par déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = uX$). Interprétation ?

2] **Loi de probabilité conditionnelle**

Soit un couple (X, Y) de variables aléatoires de densité de probabilité

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}[1 + \sin x \cos y]\mathbb{1}_{[-\pi,+\pi]^2}(x,y)$$

2.1] Déterminer les densités de probabilités marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$, les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?
2.2] Calculer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$ puis $\mathrm{Cov}(X,Y)$, les variables aléatoires X et Y sont elles corrélées ?
2.3] Déterminer la densité de probabilité conditionnelle $f_{X/Y=y}(x)$.
2.4] En déduire l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}(X/Y=y)$.

Correction très succincte du deuxième contrôle de connaissance de PS11 (les références citées sont celles du résumé de cours du polycopié)

1] **Discrétisation de la loi de probabilité exponentielle, loi géométrique**

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

et

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t) dt = (1-e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

1.2]

$$P(X_e = k) = P(X \in [k, k+1[) = F_X(k+1) - F_X(k) = (1-e^{-\lambda}) e^{-\lambda k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Par suite la variable aléatoire X_e est de loi géométrique de paramètre $1-e^{-\lambda}$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ (0 compris, donc en décalage par rapport à la définition habituelle [rel. 2.5]).
1.3]

$$\mathrm{E}(X_e) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P(X_e = k) = (1-e^{-\lambda}) \sum_{k=0}^{+\infty} k (e^{-\lambda})^k = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = \frac{1}{e^{\lambda}-1} < \frac{1}{\lambda} = \mathrm{E}(X).$$

Cette inégalité s'explique car X_e est une approximation entière de X par défaut. Quand $\lambda \ll 1$, $\mathrm{E}(X_e) \approx \mathrm{E}(X)$, ce qui s'explique par une densité très "aplatie où $\mathrm{E}(X_e)$ devient une bonne approximation de $\mathrm{E}(X)$.
1.4] La variable aléatoire continue X_f a valeur dans $[0,1[$ et a pour fonction de répartition :

$$\begin{aligned} F_{X_f}(x) &= P(X_f < x) = P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} X \in [k, k+x[\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X \in [k, k+x[) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda x}) = \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} \mathbb{1}_{[0,+1[}(x) + \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) \end{aligned}$$

$$f_{X_f}(x) = \frac{dF_{X_f}(x)}{dx} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} \mathbb{1}_{[0,+1[}(x).$$

1.5] Les événements $X_e = k$ et $X_f < x$ vérifient $(X_e = k) \cap (X_f < x) = (X \in [k, k+x[) \ \ \forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in [0,1[$. Par suite :

$$\begin{aligned} P[(X_e = k) \cap (X_f < x] &= P(X \in [k, k+x[) = F_X(k+x) - F_X(k) = e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda x}) \\ &= \left[(1-e^{-\lambda}) e^{-\lambda k}\right] \left[\frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}\right] = P[X_e = k] P[X_f < x], \end{aligned}$$

Donc les variables aléatoires X_e et X_f sont indépendantes.
1.6]

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X < \frac{y}{u}) = F_X(\frac{y}{u}) = (1-e^{-\lambda y/u}) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y),$$

soit une loi exponentielle de paramètre $\frac{\lambda}{u}$. Par suite d'après 1.4]

$$\begin{aligned} P(Y_f \in [a,b[) &= F_{Y_f}(b) - F_{Y_f}(a) = \frac{1-e^{-\lambda b/u}}{1-e^{-\lambda/u}} - \frac{1-e^{-\lambda a/u}}{1-e^{-\lambda/u}} \\ &\sim \frac{\frac{\lambda}{u}b - \frac{\lambda}{u}a}{\frac{\lambda}{u}} = b-a \quad \forall a,b \in [0,1[\text{ pour } u \to \infty \end{aligned}$$

La partie fractionnaire de Y converge en loi vers une variable aléatoire de loi uniforme sur [0,1] quand $u \to \infty$. C'est naturel car l'amplification de X entraîne un "aplatissement" de la densité de Y.

2] **Loi de probabilité conditionnelle**
2.1] D'après le cours [rel. II.15] :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{[-\pi,+\pi]}(x)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{[-\pi,+\pi]}(y),$$

soit des lois de probabilités uniformes sur $[-\pi,+\pi]$. Puisque $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
2.2] D'après la définition de l'espérance mathématique :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x}{2\pi}dx = 0. \\ \mathrm{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{y}{2\pi}dy = 0. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant le théorème de transfert [rel. III.7c] pour l'application $(X,Y) \longmapsto XY$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(XY) - 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} xy[1+\sin x\cos y]dxdy = 0 \end{aligned}$$

en utilisant les parités. Par suite les variables aléatoires X et Y sont non corrélées.
2.3] Par définition [rel. VI.5]

$$f_{X/Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{2\pi}[1+\sin x\cos y]\mathbb{1}_{[-\pi,+\pi]}(x)$$

pour $y \in [-\pi,+\pi]$.
2.4] Par définition [rel. VI.5]

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X/Y=y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X/Y=y}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x[1+\sin x\cos y]dx \\ &= 0 + \frac{\cos y}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\sin x dx = \frac{\cos y}{2\pi}\left([-x\cos x]_{-\pi}^{+\pi} + \int_{-\pi}^{+\pi}\cos x dx\right) = \cos y. \end{aligned}$$

pour $y \in [-\pi,+\pi]$.

INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
GROUPE DES ECOLES DE TELECOMMUNICATION
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module PS 11 : Probabilités (2ème session)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (seule deux pages manuscrites A4 sont autorisées)
Date : 19.3.2007
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année (1,2,3):

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les deux exercices sont "indépendants".

1] **Variable aléatoire bidimensionnelle**

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes de même loi de probabilité uniforme sur $[0,1]$.

1.1] Soient $Y_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Sup}(X_1, X_2)$ et $Y_2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Inf}(X_1, X_2)$. Déterminer la densité de probabilité de la nouvelle variable aléatoire $Z \stackrel{\text{def}}{=} Y_1 - Y_2$ (après avoir exprimé Z à l'aide de X_1 et X_2).

1.2] Calculer par la méthode de votre choix (par le théorème de transfert ou sans théorème de transfert) $\text{E}(Z)$ et $\text{var}(Z)$.

1.3] Soient $Y_3 \stackrel{\text{def}}{=} X_1 X_2$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_3 puis sa densité de probabilité.

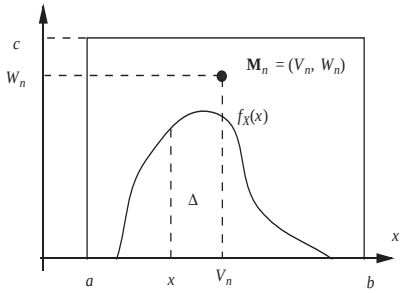
1.4] Calculer par la méthode de votre choix (par le théorème de transfert ou sans théorème de transfert) $\text{E}(Y_3)$ et $\text{var}(Y_3)$.

2] **Génération de variable aléatoire par la méthode de rejet**

Considérons la génération d'une variable aléatoire X continue de densité de probabilité $f_X(x)$ bornée à support inclus dans $[a,b]$ avec c un nombre tel que $f_X(x) \leq c$, à partir d'une suite U_n de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur [0,1].

2.1] Démontrer qu'on peut générer une suite de points $\mathbf{M}_n = (V_n, W_n)$ uniformément répartis sur le rectangle $[a,b] \times [0,c]$ à partir de la suite U_n.

2.2] On réalise l'algorithme suivant, si le point $\mathbf{M}_n$ est dans domaine Δ situé sous la densité de probabilité $f_X(x)$, nous définissons X par la valeur de V_n. Si le point $\mathbf{M}_n$ est en dehors du domaine Δ, nous tirons le point $\mathbf{M}_{n+1} = (V_{n+1}, W_{n+1})$ et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un point $\mathbf{M}_n$ soit dans Δ. Décomposer l'événement $\{X < x\}$ en une union dénombrable d'événements faisant intervenir $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



2.3] En déduire la fonction de répartition $F_X(x)$ puis la densité de probabilité de la variable aléatoire X obtenue par cet algorithme.

2.4] Calculer le nombre moyen de réalisations de termes de la suite U_n par réalisation d'une variable aléatoire X (on utilisera $\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = \frac{1}{p}$ pour $p \in]0,1]$)? Commentaires sur cet algorithme.

Correction succincte du contrôle de connaissance de PS11 de deuxième session 2006/2007

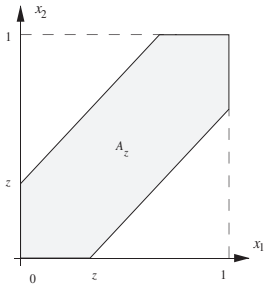
1] **Variable aléatoire bidimensionnelle**

Notons que grâce à l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) = \mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x_1,x_2).$$

1.1] Puisque $Z = |X_1 - X_2|$.

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(|X_1 - X_2| < z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ P[(X_1,X_2) \in \Delta_z] & \text{si } 0 \le z \le 1 \\ 1 & \text{si } z > 1 \end{cases}$$



avec $P[(X_1,X_2) \in \Delta_z] = \int\int_{\Delta_z} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \text{Aire}(\Delta_z) = 1-(1-z)^2 = 2z - z^2$.
Par suite

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = (2-2z)\mathbb{1}_{[0,1]}(z)$$

1.2] Ici la méthode directe (sans théorème de transfert) est préférable car elle conduit à un calcul plus simple. En effet

$$\mathrm{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z)dz = \int_0^1 (2z - 2z^2)dz = [z^2]_0^1 - \frac{2}{3}[z^3]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

De même :

$$\mathrm{E}(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_Z(z)dz = \int_0^1 (2z^2 - 2z^3)dz = \frac{2}{3}[z^3]_0^1 - \frac{1}{2}[z^4]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Par suite :

$$\mathrm{var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - [\mathrm{E}(Z)]^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

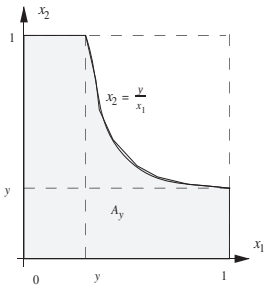
Remarque: Le calcul par le théorème de transfert aurait été ici maladroit car un peu plus long :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |x_1 - x_2| f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = 2\int_0^1 \left(\int_0^{x_1} (x_1 - x_2)dx_2\right)dx_1 \\ &= \int_0^1 (x_1^2 - \frac{x_1^2}{2})dx_1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1-x_2|^2 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\left(\int_0^1 (x_1-x_2)^2dx_2\right)dx_1\\ &= \int_0^1\left(\frac{x_1^3-(x_1-1)^3}{3}\right)dx_1 = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

1.3] De même :

$$F_{Y_3}(y) = P(Y_3<y) = P(X_1X_2<y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y<0\\ P[(X_1,X_2)\in\Delta_y] & \text{si } 0\le y\le 1\\ 1 & \text{si } y>1\end{cases}$$



avec $P[(X_1,X_2)\in\Delta_y] = \int\int_{\Delta_y} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \mathrm{Aire}(\Delta_y) = y+\int_y^1 \frac{y}{x_1}dx_1 = y - y\ln y$.
Par suite

$$f_{Y_3}(y) = \frac{dF_{Y_3}(y)}{dy} = -\ln(y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

1.4] Ici la méthode par le théorème de transfert est préférable car elle conduit à un calcul plus simple. En effet

$$\mathrm{E}(Y_3) = \int_0^1\int_0^1 x_1x_2 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

car $\mathrm{E}(X_1) = \int_0^1 x_1dx_1 = \frac{1}{2}$. De même

$$\mathrm{E}(Y_3^2) = \int_0^1\int_0^1 x_1^2x_2^2 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \mathrm{E}(X_1^2)\mathrm{E}(X_2^2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

car $\mathrm{E}(X_1^2) = \int_0^1 x_1^2dx_1 = \frac{1}{3}$. Par suite :

$$\mathrm{var}(Y_3) = \mathrm{E}(Y_3^2) - [\mathrm{E}(Y_3)]^2 = \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{144}.$$

Remarque: Le calcul direct aurait été ici maladroit car plus compliqué. En effet :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y_3}(y)dy = -\int_0^1 y\ln(y)dy = \left[-\frac{y^2}{2}\ln(y)\right]_0^1 + \int_0^1\frac{y^2}{2}\frac{dy}{y} = 0-0+\int_0^1\frac{y}{2}dy = \frac{1}{4}\\ \mathrm{E}(Y_3^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{Y_3}(y)dy = -\int_0^1 y^2\ln(y)dy = \left[-\frac{y^3}{3}\ln(y)\right]_0^1 + \int_0^1\frac{y^3}{3}\frac{dy}{y} = 0-0+\int_0^1\frac{y^2}{3}dy = \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

2] **Génération de variable aléatoire par la méthode de rejet**

2.1] Le changement de variables aléatoires

$$V_n = a+(b-a)U_{2n} \quad \text{et} \quad W_n = cU_{2n+1}$$

assure que V_n et W_n sont des variables aléatoires indépendantes de loi de probabilités uniformes sur respectivement $[a,b]$ et $[0,c]$, donc que le point $\mathbf{M}_n$ sera uniformément réparti sur le rectangle $[a,b]\times[0,c]$ (dit choix au hasard de ce point dans ce rectangle).

2.2] Par construction :

$$X=\begin{cases} V_0 & \text{si } \mathbf{M}_0\in\Delta \\ V_1 & \text{si } \mathbf{M}_0\notin\Delta \text{ et } \mathbf{M}_1\in\Delta \\ .. & .... \\ V_n & \text{si } \mathbf{M}_0\notin\Delta,\ \mathbf{M}_1\notin\Delta,\ ...\mathbf{M}_{n-1}\notin\Delta \text{ et } \mathbf{M}_n\in\Delta \end{cases}.$$

Par suite l'événement $\{X<x\}$ est la union dénombrable d'événements incompatibles suivants :

$$\{X<x\}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(\{\mathbf{M}_0\notin\Delta\}\cap\{\mathbf{M}_1\notin\Delta\}\cap...\cap\{\mathbf{M}_{n-1}\notin\Delta\}\cap\{\mathbf{M}_n\in\Delta\}\cap\{V_n<x\}\right).$$

2.3] Puisque les événements $\{\mathbf{M}_0\notin\Delta\}$, $\{\mathbf{M}_1\notin\Delta\}$,..., $\{\mathbf{M}_{n-1}\notin\Delta\}$ et $\{\mathbf{M}_n\in\Delta\}\cap\{V_n<x\}$ sont indépendants, on déduit :

$$F_X(x)\overset{\text{def}}{=}P(X<x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{n-1}P(\mathbf{M}_k\notin\Delta)\right)\left(P\left((\mathbf{M}_n\in\Delta)\cap(V_n<x)\right)\right).$$

Avec $P(\mathbf{M}_k\in\Delta)=\frac{Aire(\Delta)}{c(b-a)}=\frac{1}{c(b-a)}$ puisque $\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=\int_a^b f_X(x)dx=1$
et $P((\mathbf{M}_n\in\Delta)\cap(V_n<x))=\frac{\int_c^x f_X(t)dt}{c(b-a)}$, on obtient :

$$F_X(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[1-\frac{1}{c(b-a)}]^n\frac{\int_c^x f_X(t)dt}{c(b-a)}=\frac{1}{[1-(1-\frac{1}{c(b-a)}]}\frac{\int_c^x f_X(t)dt}{c(b-a)}=\int_c^x f_X(t)dt.$$

Et la variable aléatoire ainsi générée a bien la loi de probabilité désirée de densité de probabilité $f_X(x)$.

2.4] D'après l'énoncé il faut 2 termes de la suite U_n par point $\mathbf{M}_n$ et le nombre N nécessaire de points $\mathbf{M}_n$ est aléatoire avec pour probabilité :

$$\begin{aligned} P(N=n) &= P(\mathbf{M}_0\notin\Delta\}\cap\{\mathbf{M}_1\notin\Delta\}\cap...\cap\{\mathbf{M}_{n-2}\notin\Delta\}\cap\{\mathbf{M}_{n-1}\in\Delta\},\quad n\in\mathbb{N}^* \\ &= [1-\frac{1}{c(b-a)}]^{n-1}\frac{1}{c(b-a)}, \end{aligned}$$

soit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{c(b-a)}$. Par suite

$$\mathrm{E}(N)=\sum_{n=1}^{\infty}nP(N=n)=c(b-a).$$

Par suite le nombre moyen de réalisations de termes de la suite U_n par réalisation d'une variable aléatoire X est $2\mathrm{E}(N)=2c(b-a)$.

Commentaires :

On voit donc l'intérêt de choisir le plus petit majorant c de $f_X(x)$ et le plus petit domaine $[a,b]$ à l'intérieur du support de $f_X(x)$.

D'autre part, puisque $P(\mathbf{M}_n\notin\Delta)=1-\frac{1}{c(b-a)}$, la probabilité que tous les points $\mathbf{M}_n$ n'appartiennent pas à Δ est $P(\bigcap_{n=0}^{\infty}(\mathbf{M}_n\notin\Delta)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}P(\mathbf{M}_k\notin\Delta)=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{c(b-a)})^n=0$. Il n'y a donc presque sûrement qu'un nombre fini de tirages avant que $\mathbf{M}_n$ soit dans Δ, ce qui est "rassurant".

INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
GROUPE DES ECOLES DE TELECOMMUNICATION
CONTROLE DE CONNAISSANCES

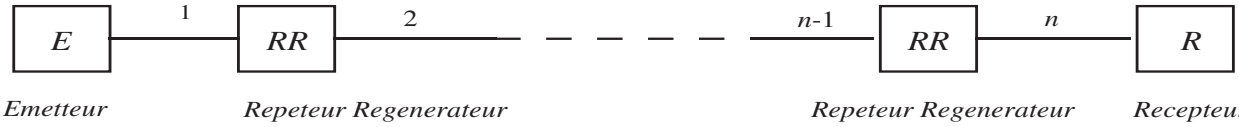
Module PS 11 : Probabilités (1ère partie)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (une page manuscrite A4 est autorisée)
Date : 16.11.2007
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année (1 ou 2):

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même, *si possible dans les limites qui vous sont proposées*. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les deux exercices sont "indépendants".

1] **Probabilité cumulée d'erreur**

On considère une transmission numérique sur fibre optique transatlantique constituée de n tronçons.



Considérons la transmission d'une information binaire (bit). Ce bit est transmis sur le canal de transmission avec une probabilité d'erreur p sur chacun des n tronçons. Les erreurs sont indépendantes entre les tronçons. Chaque répéteur régénérateur détecte l'information binaire et la retransmet sur le tronçon suivant.

1.1] Exprimer la probabilité d'erreur globale dans les cas particuliers $n = 2, 3$. Puis en donner une expression générale P_n(erreur) en fonction de n et p, (on pourra distinguer le cas n pair et n impair).

1.2] Pour obtenir une expression générale plus lisible, après avoir exprimé l'événement {erreur globale sur n tronçons} à l'aide de l'événement {erreur globale sur $n-1$ tronçons}, calculer P_n(erreur) en fonction de P_{n-1}(erreur) et de p. En déduire une formule analytique donnant P_n(erreur) en fonction de n et p, (on pourra utiliser la propriété $u_n = a + bu_{n-1} \Rightarrow \left(u_n - \frac{a}{1-b}\right) = b\left(u_{n-1} - \frac{a}{1-b}\right)$). Quelle est la limite de P_n(erreur) pour $n \to \infty$. Interprétation.

2] **Changement de variable aléatoire**

Soient U_1 et U_2, deux variables aléatoires indépendantes et de loi de probabilité uniforme sur $]0, 1]$ et a_1 et a_2, deux constantes strictement positives. On considère les trois variables aléatoires X, Y et Z définies par

$$X = -\frac{1}{a_1}\ln(U_1), \quad Y = -\frac{1}{a_2}\ln(U_2) \quad \text{et} \quad Z = -\frac{1}{a_1}\ln(U_1) - \frac{1}{a_2}\ln(U_2).$$

où ln(.) désigne le logarithme népérien.

2.1] Déterminer la fonction de répartition $F_X(x)$, puis la densité de probabilité $f_X(x)$ de la variable aléatoire X.

2.2] Retrouver directement $f_X(x)$ à l'aide de la formule du changement de variable bijectif.

2.3] En déduire la densité de probabilité $f_{X,Y}(x, y)$ du couple de variable aléatoire (X, Y), puis calculer $P(X > Y)$. Interprétation ?

2.4] En observant que $Z = X + Y$, déterminer directement la densité de probabilité $f_Z(z)$

2.5] Dans le cas particulier où $a_1 = a_2 = a$, déterminer directement la fonction de répartition $F_Z(z)$, puis la densité de probabilité $f_Z(z)$ de la variable aléatoire Z.

2.6] Dans le cas général $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$, déterminer la densité de probabilité $f_{X,Z}(x,z)$ du couple de variable aléatoire (X,Z) à l'aide de la formule du changement de variable bijectif.
2.7] En déduire à nouveau $f_Z(z)$ (on distinguera les cas $a_1 = a_2$ et $a_1 \neq a_2$).

Correction très succincte du premier contrôle de connaissance de PS11
1] **Probabilité cumulée d'erreur**
1.1] Puisque {erreur globale sur 2 tronçons}={une seule erreur sur 2 tronçons}, $P_2(\text{erreur}) = 2p(1-p)$; {erreur globale sur 3 tronçons}={une seule ou trois erreurs sur 3 tronçons}, $P_3(\text{erreur}) = 3p(1-p)^2 + p^3$. Dans le cas général :

{erreur globale sur n tronçons}={un nombre impair d'erreurs sur n tronçons}, par suite

$$P_n(\text{erreur}) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \mathrm{C}_n^{2k+1} p^{2k+1}(1-p)^{n-(2k+1)} & n \text{ impair} \\ \sum_{k=0}^{(n/2)-1} \mathrm{C}_n^{2k+1} p^{2k+1}(1-p)^{n-(2k+1)} & n \text{ pair} \end{array} \right.$$

1.2] En notant E_n={erreur globale sur n tronçons} et E={erreur sur le tronçon n}, nous avons

$$E_n = \left(E_{n-1} \cap \bar{E}\right) \cup \left(\bar{E}_{n-1} \cap E\right).$$

Puisque qu'il s'agit d'une union de deux événements incompatibles et que les erreurs sur différents canaux sont indépendantes

$$P_n(\text{erreur}) = (1-p)P_{n-1}(\text{erreur}) + p(1 - P_{n-1}(\text{erreur}))$$

D'ou la relation de récurrence $P_n(\text{erreur}) = p + (1-2p)P_{n-1}(\text{erreur})$. Par suite : $\left(P_n(\text{erreur}) - \frac{1}{2}\right) = (1-2p)\left(P_{n-1}(\text{erreur}) - \frac{1}{2}\right)$, soit $P_n(\text{erreur}) = \frac{1}{2} + (1-2p)^{n-1}\left(P_1(\text{erreur}) - \frac{1}{2}\right)$ et avec $P_1(\text{erreur}) = p$, on obtient

$$P_n(\text{erreur}) = \frac{1}{2}\left(1 - (1-2p)^n\right).$$

Il s'agit naturellement d'une fonction décroissante de p qui tend vers $\frac{1}{2}$ quand le nombre n de tronçons tend vers ∞ : la pire des situations où le récepteur joue à pile ou face ! Remarquons que l'approximation $P_n(\text{erreur}) \approx np$ n'est valide que si $np \ll 1$.

2] **Changement de variable aléatoire**
2.1]

$$F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X < x) = P\left(-\frac{1}{a_1}\ln(U_1) < x\right) = P(U_1 > e^{-a_1 x}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - e^{-a_1 x} & \text{si } x \geq 0 \\ P(\emptyset) = 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. .$$

Par suite $f_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dF_X(x)}{dx} = a_1 e^{-a_1 x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$. Soit une loi de probabilité exponentielle de paramètre a_1.
2.2] Le changement de variable $U_1 \in]0,1] \longmapsto X \in [0,+\infty[$ est bijectif monotone décroissant. Par suite

$$f_X(x) = \frac{1}{|\frac{dx}{du_1}|} f_{U_1}(u_1)_{|u_1 = e^{-a_1 x}} = a_1 e^{-a_1 x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x),$$

car $\frac{dx}{du_1} = -\frac{1}{a_1 u_1} = -\frac{1}{a_1 e^{-a_1 x}}$ et $f_{U_1}(u_1) = \mathbb{1}_{]0,1]}(u_1)$.
2.3] Puisque les variables aléatoires U_1 et U_2 sont indépendantes, X et Y fonctions chacune de variables aléatoires indépendantes sont indépendantes. Par suite

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = a_1 a_2 e^{-(a_1 x + a_2 y)} \mathbb{1}_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[}(x,y).$$

$$
\begin{aligned}
P(X>Y) &= \iint_{x>y} f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^x a_1a_2e^{-(a_1x+a_2y)}dy\right]dx = \int_0^{+\infty} a_1e^{-a_1x}\left[\int_0^x a_2e^{-a_2y}dy\right]dx \\
&= 1-\int_0^{+\infty} a_1e^{-(a_1+a_2)x}dx = \frac{a_2}{a_1+a_2}\begin{cases} =1/2 & \text{si } a_1=a_2 \\ <1/2 & \text{si } a_1>a_2 \\ >1/2 & \text{si } a_1<a_2 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Ce dernier résultat s'interprète : pour $a_1 = a_2$, les variables aléatoires X et Y de même loi de probabilité et indépendantes ont chacune même chance d'être plus grande que l'autre. Pour $a_1 > a_2$, la variable aléatoire X est plus concentrée vers l'origine que la variable aléatoire Y, donc a moins de chance d'être plus petite et $P(X > Y) < 1/2$.

2.4] Puisque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, la densité de probabilité $f_Z(z)$ est le produit de convolution des densités de probabilité $f_X(z)$ et $f_Y(z)$, soit

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(z-t)dt = \int_0^z a_1a_2e^{-a_1t}e^{-a_2(z-t)}dt \\
&= a_2e^{-a_2z}\int_0^z a_1e^{-(a_1-a_2)t}dt = \begin{cases} a^2ze^{-az}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) & \text{si } a_1=a_2=a \\ \frac{a_1a_2}{a_1-a_2}\left(e^{-a_2z}-e^{-a_1z}\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) & \text{si } a_1\neq a_2 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

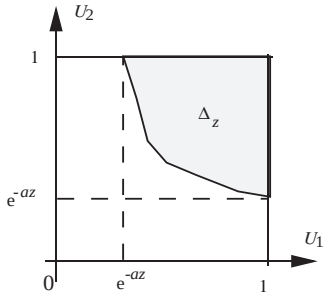
2.5]

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &\overset{\text{def}}{=} P(Z<z) = P\left(-\frac{1}{a}\ln(U_1)-\frac{1}{a}\ln(U_2)<z\right) = P(U_1U_2>e^{-az}) \\
&= \begin{cases} \iint_{\Delta_z} f_{U_1,U_2}(u_1,u_2)du_1du_2 = \iint_{\Delta_z} du_1du_2 & \text{si } z\geq 0 \\ P(\emptyset)=0 & \text{si } z<0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

car

$$
\begin{aligned}
f_{U_1,U_2}(u_1,u_2) &= f_{U_1}(u_1)f_{U_2}(u_2) \\
&= \mathbb{1}_{]0,1]\times]0,1]}(u_1,u_2)
\end{aligned}
$$

(loi uniforme sur le carré $]0,1]\times]0,1]$).
avec $\Delta_z \overset{\text{def}}{=} \{(u_1,u_2)$ tel que $0<u_1\leq 1; 0<u_2\leq 1$ et $u_1u_2>e^{-az})\}$.



On obtient géométriquement par un calcul de surface pour $z \geq 0$

$$
\iint_{\Delta_z} du_1du_2 = 1-\left(e^{-az}+\int_{e^{-az}}^1 \frac{e^{-az}}{u}du\right) = 1-\left(e^{-az}\left(1+\left(\ln 1-\ln e^{-az}\right)\right)\right) = 1-e^{-az}(1+az).
$$

Soit

$$
F_Z(z) = \left(1-e^{-az}(1+az)\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) \quad \text{et} \quad f_Z(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{dF_Z(z)}{dz} = a^2ze^{-az}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z).
$$

2.6] Puisque le changement de variable aléatoire $(U_1,U_2) \in]0,1]\times]0,1] \longmapsto (X,Z) \in \Delta$ est bijectif avec $\Delta \overset{\text{def}}{=} \{(x,z)$ tel que $0<e^{-a_1x}\leq 1$ et $0<e^{-a_2(z-x)}\leq 1\} = \{(x,z)$ tel que $x>0$ et $z-x>0\}$. Par suite la formule du changement de variable bijectif donne :

$$
f_{X,Z}(x,z) = \frac{1}{\left|\text{Det}\begin{pmatrix} \frac{dx}{du_1} & \frac{dx}{du_2} \\ \frac{dz}{du_1} & \frac{dz}{du_2} \end{pmatrix}\right|} f_{U_1,U_2}(u_1,u_2)\big|_{u_1=e^{-a_1x},u_2=e^{-a_2(z-x)}}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left|\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -1/a_1u_1 & 0 \\ -1/a_1u_1 & -1/a_2u_2 \end{pmatrix}\right|}\Big|_{u_1=e^{-a_1x},u_2=e^{-a_2(z-x)}} 1_\Delta(x,z) \\
&= a_1a_2e^{-a_1x}e^{-a_2(z-x)}\mathbb{1}_\Delta(x,z).
\end{aligned}
$$

2.7] La densité de probabilité $f_Z(z)$ de la variable aléatoire marginale Z issue du couple (X,Z) est donnée par :

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Z}(x,z)dx = \int_0^z a_1a_2e^{-a_1x}e^{-a_2(z-x)}dx \\
&= a_2e^{-a_2z}\int_0^z a_1e^{-(a_1-a_2)x}dx = \begin{cases} a^2ze^{-az}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) & \text{si } a_1=a_2=a \\ \frac{a_1a_2}{a_1-a_2}\left(e^{-a_2z}-e^{-a_1z}\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) & \text{si } a_1\neq a_2 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
GROUPE DES ECOLES DE TELECOMMUNICATION
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module PS 11 : Probabilités (2ème partie)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (seules deux pages manuscrites A4 sont autorisées)
Date : 30.1.2008
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année (1,2,3):

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les quatre exercices sont "indépendants". On rappelle la notation $\mathbb{1}_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$.

1] **Entropie d'une variable aléatoire gaussienne**

En théorie de l'information, on définit l'entropie $H(X)$ d'une variable aléatoire continue X monodimentionnelle ou multidimentionnelle de densité de probabilité $f_X(x)$ par $H(X) = \mathrm{E}[-\log_2 f_X(X)]$ (où $\log_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$).

1.1] Calculer l'entropie $H(X)$ de la variable aléatoire gaussienne monodimentionnelle centrée de densité de probabilité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}).$$

1.2] Calculer l'entropie $H(X_1, X_2)$ de la variable aléatoire gaussienne bidimentionnelle à composantes centrées de mêmes variances σ^2 et corrélées de coefficient de corrélation ρ, de densité de probabilité

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\left(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2\right)\right).$$

2] **Variable aléatoire gaussienne**

Soient X, Y et Z, trois variables aléatoires gaussiennes centrées de variance unité et indépendantes.

2.1] Quelle est la loi de probabilité de $U = X + Y + Z$?

2.2] Les variables aléatoires U et $X - Y$ sont elles indépendantes ?

3] **Loi de probabilité conditionnelle**

Soit la variable aléatoire bidimensionnelle (X, Y) de densité de probabilité

$$f_{X,Y}(x, y) = (x + y)\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x, y).$$

3.1] Calculer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

3.2] Déterminer la densité de probabilité $f_X(x)$, en déduire la densité de probabilité conditionnelle $f_{Y/X=x}(y)$.

3.3] Calculer l'espérance mathématique conditionnelle $\mathrm{E}(Y/X = x)$. En déduire l'approximation $\hat{y}(x)$ de y fonction de x au sens de $\min_{\hat{Y}(X)} \mathrm{E}([\hat{Y}(X) - Y]^2)$.

4] **Génération de variable aléatoire**

On dispose d'un générateur de variables aléatoire indépendantes W_n discrètes prenant les valeurs équiprobables 0 et 1. Démontrer qu'on peut en déduire un générateur de variables aléatoire indépendantes X_n prenant les valeurs 0 et 1 avec $P(X_n = 1) = \frac{1}{4}$ et $P(X_n = 0) = \frac{3}{4}$. Généraliser avec $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = 0) = 1 - p$ pour $p \in [0, 1]$ quelconque représentable par un nombres binaire de 64 bits.

Que peut on conclure quant à la génération d'une suite Y_n de variables aléatoires indépendantes de loi de probabilité uniforme sur [0,1] ?

Correction succincte du contrôle de connaissance de PS11 de deuxième partie 2007/2008

1] **Entropie d'une variable aléatoire gaussienne**

1.1] $\log_2(f_X(x)) = -\log_2(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{x^2}{2\sigma^2}\log_2 e$. Par suite d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} H(X) &= \mathrm{E}[-\log_2 f_X(X)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} \log_2[f_X(x)] f_X(x) dx \\ &= \log_2 e(\sigma\sqrt{2\pi}) + \left(\frac{\mathrm{E}(X^2)}{2\sigma^2}\right)\log_2 e = \log_2(\sigma\sqrt{2\pi e}) \end{aligned}$$

car $\mathrm{E}(X^2) = \sigma^2$.

1.2] $\log_2(f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)) = -\log_2(2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}) - \frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)\log_2 e$. Par suite d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} H(X_1, X_2) &= \mathrm{E}[-\log_2 f_{X_1,X_2}(X_1, X_2)] = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \log_2[f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)] f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_1 x_2 \\ &= \log_2(2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}) + \left(\frac{\mathrm{E}(X_1^2) - 2\rho\mathrm{E}(X_1X_2) + \mathrm{E}(X_2^2)}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right)\log_2 e \\ &= \log_2(2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}) + \log_2 e = \log_2[\sigma^2 2\pi e\sqrt{1-\rho^2}] \end{aligned}$$

car $\mathrm{E}(X_1^2) = \mathrm{E}(X_2^2) = \sigma^2$ et $\mathrm{E}(X_1X_2) = \rho\sigma^2$.

2] **Variable aléatoire gaussienne**

2.1] D'après l'énoncé la variable aléatoire à trois dimensions (X, Y, Z) est gaussienne. Par suite U combinaison linéaire des trois composantes X, Y et Z de U est une variable aléatoire de loi de probabilité gausienne avec

$$\mathrm{E}(U) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(Z) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(U) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + \mathrm{var}(Z) = 3.$$

2.2] Puisque la variable aléatoire (U, V) avec $V = X - Y$, combinaison linéaire de X, Y et Z est gaussienne à deux dimensions, U et V sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées. Or

$$\mathrm{E}(UV) = \mathrm{E}[(X + Y + Z)(X - Y)] = \mathrm{E}[X^2 + XZ - Y^2 - ZY] = 1 + 0 - 1 - 0 = 0,$$

car $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{var}(X) = 1$ et $\mathrm{E}(XZ) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Z) = 0$. De même pour $\mathrm{E}(Y^2)$ et $\mathrm{E}(ZY)$. Donc les variables aléatoires U et V sont non corrélées, et par suite sont indépendantes.

3] **Loi de probabilité conditionnelle**

3.1] D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^1\int_0^1 x(x + y) dx dy \\ &= \left(\int_0^1 x^2 dx\right)\left(\int_0^1 dy\right) + \left(\int_0^1 x dx\right)\left(\int_0^1 y dy\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

De même $\mathrm{E}(Y) = \frac{7}{12}$. Puis d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy \\ &= 2\left(\int_0^1 x^2dx\right)\left(\int_0^1 ydy\right) = 2\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Puis

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = -\frac{1}{144}.$$

3.2]

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \left(\int_0^1 (x+y)dy\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(x) = (x+\frac{1}{2})\mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

Par suite :

$$f_{Y/X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2(x+y)}{2x+1}\mathbb{1}_{[0,1]}(y) \quad \text{pour} \quad x \in [0,1].$$

3.3] Par projection :

$$\mathrm{E}(Y/X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y/X=x}(y)dy = \int_0^1 \frac{2y(x+y)}{2x+1}dy = \frac{2x}{2x+1}\frac{1}{2} + \frac{2}{2x+1}\frac{1}{3} = \frac{3x+2}{3(2x+1)}.$$

Par suite $\hat{y}(x) = \frac{3x+2}{3(2x+1)}$ est la meilleure approximation de y fonction de x au sens de $\min_{\hat{Y}(X)} \mathrm{E}([\hat{Y}(X)-Y]^2)$.

4] **Génération de variable aléatoire**

Il suffit de considérer les 4 valeurs possibles du couple binaire (W_{2n-1}, W_{2n}) et faire l'association :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } (W_{2n-1}, W_{2n}) = (00) \\ 0 & \text{si } (W_{2n-1}, W_{2n}) = (01), (01) \text{ ou } (11) \end{cases}$$

Par suite $P(X_n = 1) = P(W_{2n-1}, W_{2n}) = (00) = \frac{1}{4}$ et $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

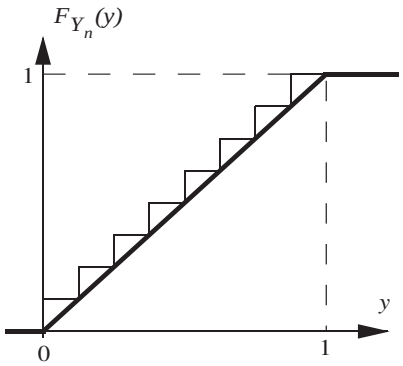
Cette méthode s'étend pour n'importe quelle valeur de p représentable avec un ordinateur qui travaille avec des nombres de 64 bits, soit pour $p = \sum_{k=1}^{64} a_k 2^{-k}$ avec $a_k \in \{0,1\}$:

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{k=1}^{64} W_{64n-k}2^{-k} < p \\ 0 & \text{si } \sum_{k=1}^{64} W_{64n-k}2^{-k} \geq p \end{cases}$$

Par suite, cette méthode peut être utilisée pour générer une suite Y_n de variables aléatoires discrètes indépendantes de loi de probabilité uniforme sur $\{0, 1.2^{-64}, 2.2^{-64}, ..., k.2^{-64}, ..., 1-2^{-64}\}$ à l'aide de

$$Y_n = \sum_{k=1}^{64} W_{64n-k}2^{-k},$$

c'est à dire suivant approximativement (au sens $F_{Y_n}(y) \approx y\mathbb{1}_{[0,1]}(y) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(y)$) une loi de probabilité uniforme sur [0,1]. Ainsi pour 3 bits :



TELECOM et Management SudParis
Institut TELECOM
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module PS 11 : Probabilités (deuxième partie)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (deux pages manuscrites A4 sont autorisées)
Date : 26 Mars 2008
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année (1,2,3)

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même, si possible dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les trois exercices sont "indépendants".

1] **Cerise sur le gâteau**

On considère un gâteau circulaire avec une cerise sur le bord. On découpe le gâteau en deux parts en coupant suivant deux rayons choisis au hasard.

1.1] Quelle est la probabilité que la part contenant la cerise soit plus petite que la part ne contenant pas la cerise ?

1.2] Quelle est la longueur angulaire moyenne de la part contenant la cerise ? Commentaires ?

2] **File d'attente**

Trois clients A, B et C se présentent à deux guichets libres. A et B sont servis immédiatement et C attend que l'un des deux guichets se libère avant de pouvoir être servi. On suppose que les temps de service X_A, X_B et X_C de A, B et C respectifs sont des variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité exponentielle de paramètre λ ($f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$).

2.1] Soit Y_C le temps d'attente de C et Z_C le temps passé par C dans le système (attente+service). Exprimer Y_C et Z_C en fonction de X_A, X_B et X_C.

2.2] Calculer la fonction de répartition, puis la densité de probabilité de la variable aléatoire Y_C ?

2.3] Calculer la densité de probabilité de la variable aléatoire Z_C ?

3] **Loi de probabilité exponentielle**

Soit deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 de même loi exponentielle de paramètre identique λ ($f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$).

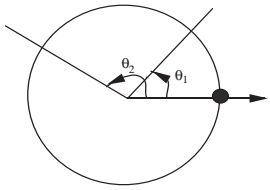
3.1] Calculer $P(X_1 < aX_2)$ pour $a > 0$.

3.2] En déduire la probabilité conditionnelle $P(X_1 < X_2 / X_1 < 2X_2)$. Commentaires ?

Correction très succincte du contrôle de connaissance de PS11 deuxième partie

1] **Cerise sur le gâteau**

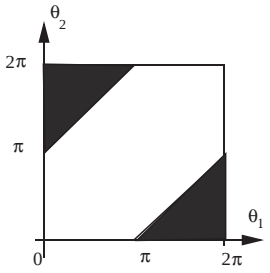
On note Θ_1 et Θ_2 les angles formés par les deux rayons et le rayon qui passe par la cerise. La longueur angulaire de la part contenant la cerise est donc de $2\pi - |\Theta_1 - \Theta_2|$. D'après l'énoncé, les variables aléatoires Θ_1 et Θ_2 sont indépendantes et équidistribuées selon une loi de probabilité uniforme sur $[0, 2\pi]$.



1.1] La probabilité que la part contenant la cerise soit plus petite que la part ne contenant pas la cerise est donnée par

$$\begin{aligned} P(2\pi - |\Theta_1 - \Theta_2| < |\Theta_1 - \Theta_2|) &= P(|\Theta_1 - \Theta_2| > \pi) \\ &= \int\int_{\Delta} f_{\Theta_1,\Theta_2}(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\int_{\Delta} d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \frac{Aire(\Delta)}{(2\pi)^2} = \frac{\pi^2}{(2\pi)^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

avec $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{(\theta_1,\theta_2), |\theta_1 - \theta_2| > \pi)\}$.



1.2] D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(|\Theta_1 - \Theta_2|) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\theta_1 - \theta_2| f_{\Theta_1,\Theta_2}(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\theta_1}(\theta_1 - \theta_2)d\theta_2\right)d\theta_1 = \frac{2\pi}{3}, \end{aligned}$$

puisque les variables aléatoires Θ_1 et Θ_2 sont indépendantes $f_{\Theta_1,\Theta_2}(\theta_1,\theta_2) = f_{\Theta_1}(\theta_1)f_{\Theta_1}(\theta_2)$ et puisque $f_{\Theta}(\theta_2) = f_{\Theta}(\theta_2) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{]0,2\pi[}$ car Θ_1 et Θ_2 sont choisies au hasard dans $[0, 2\pi]$.

Par suite la longueur moyenne de la part contenant la cerise est de

$$2\pi - \mathrm{E}(|\Theta_1 - \Theta_2|) = \frac{4\pi}{3} > \pi.$$

La part contenant la cerise est plus grande que la part ne la contenant pas en moyenne et elle est également plus grande dans 75% des cas. Pour voir que ce résultat ne contredit pas l'intuition, il faut inverser les opérations. On découpe d'abord au hasard deux rayons dans le gâteau puis on jette au hasard la cerise sur le bord. Celle-ci a bien intuitivement plus de chance de tomber sur la part la plus grosse.

2] **File d'attente**

2.1] D'après les hypothèses de l'énoncé :

$$Y_C = \inf(X_A, X_B) \qquad \text{et} \qquad Z_C = Y_C + X_C = \inf(X_A, X_B) + X_C.$$

2.2]

$$\begin{aligned} F_{Y_C}(y) &\stackrel{\text{def}}{=} P(Y_C < y) = P(\inf(X_A, X_B) < y) = P[(X_A < y) \cup (X_B < y)] \\ &= P(X_A < y) + P(X_B < y) - P[(X_A < y) \cap (X_B < y)] \\ &= P(X_A < y) + P(X_B < y) - P(X_A < y)P(X_B < y) = F_{X_A}(y) + F_{X_B}(y) - F_{X_A}(y)F_{X_B}(y) \end{aligned}$$

car X_A et X_B sont des variables aléatoires indépendantes. Or pour une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre λ, sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{array} \right. = (1 - e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

Par suite

$$F_{Y_C}(y) = (1 - e^{-2\lambda y})\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) \text{ et } f_{Y_C}(y) = 2\lambda e^{-2\lambda y}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y).$$

Soit une loi exponentielle de paramètre 2λ.

2.3] Puisque X_A, X_B et X_C sont indépendantes, Y_C et X_C sont aussi indépendantes. Alors

$$\begin{aligned} f_{Z_C}(z) &= f_{Y_C}(z) * f_{X_C}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_C}(u) f_{X_C}(z-u)du \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & z < 0 \\ \int_0^z f_{Y_C}(u) f_{X_C}(z-u)du & z \geq 0 \end{array} \right. \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & z < 0 \\ 2\lambda e^{-\lambda z}\left[\int_0^z \lambda e^{-\lambda u}du\right] & z \geq 0 \end{array} \right. = 2\lambda e^{-\lambda z}(1 - e^{-\lambda z})\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z). \end{aligned}$$

3] **Loi de probabilité exponentielle**

3.1] Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$.
Alors avec $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{x_1 < ax_2\}$:

$$\begin{aligned} P(X_1 < aX_2) &= \int\int_{\Delta} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int\int_{\Delta} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)dx_1dx_2 \\ &= \int_0^{\infty}\left[\int_0^{ax_2} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)dx_1\right]dx_2 = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x_2}\left[1 - e^{-\lambda a z_2}\right]dx_2 \\ &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x_2}dx_2 - \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda(1+a)x_2}dx_2 = 1 - \frac{1}{1+a} = \frac{a}{1+a}. \end{aligned}$$

Expression qui est une fonction croissante de a, tendant vers 1 pour a tendant vers $+\infty$ et vers 0 pour a tendant vers 0, avec $P(X_1 < X_2) = \frac{1}{2}$, ce qui est intuitif puisque X_1 et X_2 sont indépendantes et de même loi de probabilité.

3.2] Par suite :

$$P(X_1 < X_2 / X_1 < 2X_2) = \frac{P[(X_1 < X_2) \cap (X_1 < 2X_2)]}{P(X_1 < 2X_2)} = \frac{P(X_1 < X_2)}{P(X_1 < 2X_2)} = \frac{1}{2}\frac{1+2}{2} = \frac{3}{4}.$$

Telecom - INT

JUIN, 2007
Première session

EXAMEN ÉCRIT DE TRAITEMENT DU SIGNAL (MODULE SI12)

L'usage des calculatrices, notes de cours ou autres documents, n'est pas autorisé.

(Durée de l'épreuve: 90 minutes)

NOTE:
- Les différentes parties du sujet sont indépendantes.
- Les réponses de la partie A seront données sur la feuille de réponses prévue à cet effet à la fin du sujet. Les parties B et C seront rédigées sur des copies vierges.
- Le barême prévu pour les questions à choix multiple est de +1 point par affirmation juste et -1/2 points par affirmation fausse. Les autres questions valent chacune 1 point environ.
- Dans l'ensemble du sujet: $\imath$ désigne le nombre complexe tel que $\imath^2 = -1$; la conjugaison complexe est indiquée par une étoile ($.^*$) et l'espérance mathématique par $\mathrm{E}\{.\}$.

PARTIE A : Questions et QCM sur les cours/TDs/TPs (répondre sur la feuille prévue à cet effet)

Deux ou trois lignes maximum sont demandées dans les questions 1 à 6
(place réservée sur la feuille de réponses).
Pour les questions 7 à 20 de type QCM, indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s)
en entourant les bonnes réponses sur le tableau p.8.

1. Définir les notions de signal aléatoire et signal déterministe.

2. Comment se définit la densité spectrale de puissance ? Quel est le lien entre puissance et densité spectrale de puissance ?

3. Comment s'écrit la fonction de transfert en z d'un filtre numérique lorsque celui-ci est de réponse impulsionnelle finie (filtre transverse) ? Quelle est la relation correspondante qui permet de calculer la sortie ?

4. Quelle est la définition du signal analytique associé à un signal réel ?

5. On définit le signal $x(t)$ par :

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_\tau(t - nT)$$

où : $T > \tau$ sont deux réels positifs et Π_τ désigne une porte de largeur τ ($\Pi_\tau(t) = 1$ si $|t| \leq \tau/2$ et 0 sinon). Rappeler le calcul de la transformée de Fourier de ce signal que vous avez étudié en TP.

suite ...

6. On envoie en entrée de l'analyseur de spectre analogique que vous avez manipulé en TP le signal $x(t)$ de la question précédente avec $\tau = 25\mu$s et $T = 10$ms (valeurs du TP). L'analyseur est réglé avec les paramètres suivants :
- `Freq. center` = 20kHz
- `Freq. span` = 1kHz
- `Res. bandwidth` = 9.1Hz
- `Sweep time` = 6.55s

Tracer sur la feuille de réponses (p.8) l'allure de la courbe que l'on peut observer à l'analyseur de spectre.

7. Sous le logiciel SCILAB, on entre les commandes[1] suivantes :
```
t = (1:512);
x = cos(2*%pi*0.25*t);
X = fft(x);
```

(a) La commande `plot((0 :511)/512,X)` affiche le le module de la transformée de Fourier discrète de `x` en fonction de la fréquence normalisée.

(b) La commande `plot(abs(fft(x)))` affiche le le module de la transformée de Fourier discrète de `x` en fonction de la fréquence normalisée.

(c) La commande `plot((0 :511)/512,abs(X))` affiche le module de la transformée de Fourier discrète de `x` en fonction de la fréquence normalisée. Ici, la fréquence réelle est aussi la fréquence normalisée et il apparaît des raies aux fréquences 0,25 et 0,75.

(d) La commande `plot(t,abs(X))` affiche le le module de la transformée de Fourier discrète de `x` en fonction de la fréquence normalisée. Ici, la fréquence réelle est aussi la fréquence normalisée et il apparaît des raies aux fréquences 0,25 et 0,75.

8. Si $x = \begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 5 & -2\end{bmatrix}$ et si on note $X = \begin{bmatrix}X_0 & X_1 & \dots & X_7\end{bmatrix}$ la transformée de Fourier discrète de la suite d'échantillons contenus dans le vecteur x, que vaut X_0 ?

(a) $+\sqrt{2} - i2\pi$

(b) $-\sqrt{2} + i2\pi$

(c) 0

(d) 8

9. Dans une modulation :

(a) Le signal qui contient l'information en bande de base est appelé porteuse.

(b) Le signal qui contient l'information en bande de base est appelé signal modulant.

(c) Le signal modulé est une sinusoïde pure.

(d) Le signal modulé est toujours obtenu à partir de la transformée de Hilbert du signal modulant.

10. La transformée de Fourier à temps discret

(a) est périodique de période 1.

(b) n'est définie que pour un ensemble fini de fréquences.

(c) n'a de sens que pour un signal de durée finie.

(d) n'a de sens que pour un signal de période 1.

[1] Certains ont pu utiliser `plot2d` : l'effet est ici identique à `plot`.

suite ...

11. Un filtre à temps continu est stable au sens entrée bornée-sortie bornée si et seulement si :

(a) la réponse à un Dirac en entrée est de durée finie.

(b) sa réponse impulsionnelle $h(t)$ satisfait : $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < +\infty$.

(c) sa réponse impulsionnelle $h(t)$ satisfait : $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2\, dt < +\infty$.

(d) sa réponse impulsionnelle $h(t)$ satisfait : $\lim_{t\to+\infty} h(t) = 0$.

12. Soit $x(t)$ un signal déterministe d'énergie finie, $X(f)$ sa transformée de Fourier et $\Gamma_x(f)$ sa densité spectrale d'énergie.

(a) On a : $\forall f \in \mathbb{R} \quad \Gamma_x(f) = |X(f)|^2$.

(b) On a : $\forall f \in \mathbb{R} \quad \Gamma_x(f) = |X(f)|$.

(c) On a l'égalité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(f)\, df$.

(d) $\Gamma_x(f)$ est toujours maximal en 0.

13. Le domaine de convergence de la transformée en z d'un signal $x_n, n \in \mathbb{Z}$ à temps discret :

(a) donne une indication sur l'inversibilité de la transformée en z : le cercle unité doit en effet appartenir au domaine de convergence.

(b) est vide sauf pour des signaux de durée finie.

(c) n'a aucun intérêt puisque seule l'expression de la transformée en z nous intéresse.

(d) est important car une même fonction de la variable complexe z considérée sur des domaines de convergence distincts peut être la transformée en z de deux signaux à temps discret distincts.

14. La formule d'interpolation d'un signal à bande limitée :

(a) est une approximation qui permet d'approcher les valeurs du signal entre les échantillons.

(b) est une égalité ; la reconstruction exacte du signal entre deux échantillons est possible en théorie.

(c) ne fait intervenir que les échantillons passés du signal car un filtre de restitution doit être causal.

(d) n'est valable que pour des signaux périodiques.

15. Un filtre à réponse impulsionnelle finie est aussi appelé :

(a) filtre transverse.

(b) filtre récursif.

(c) filtre à causalité finie.

(d) filtre à pôles positifs.

suite . . .

QCM sur les conférences

Indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s).

16. [J. Boudy] Un système "Mains-libres" d'un terminal téléphonique de type GSM est caractérisé par :

(a) un "haut-parleur" placé sur la base du terminal pour amplifier la voix du correspondant ;

(b) un microphone et un haut-parleur (intégré ou non au terminal) distants de l'utilisateur, utilisables à la place du combiné téléphonique ;

(c) un système de prise de son spécifiquement prévu pour la téléphonie mobile en voiture.

17. [J. Boudy] Un système de reconnaissance de parole (RdP) "Indépendant du locuteur" permettant par exemple de prononcer des chiffres ou des mots de commande usuels isolés est :

(a) un système permettant de vérifier l'identité d'une personne à partir de quelques mots prononcés par elle ;

(b) un système pour lequel il devra effectuer un apprentissage préalable de mots de commandes et de chiffres ;

(c) un système permettant à l'utilisateur de composer automatiquement un numéro de téléphone en l'énonçant vocalement, ceci sans avoir besoin d'effectuer un apprentissage préalable du système de RdP.

18. [P. Mège] Les techniques de codage canal sont :

(a) utilisées uniquement dans les systèmes numériques de radiocommunication pour protéger les informations transmises sur la voie radio.

(b) utilisées dans de nombreux systèmes de télécommunications, mais elles sont réservées exclusivement à la protection des informations transmises sur le médium de transmission que ce soit un lien filaire, radio ou autres.

(c) utilisées pour de nombreuses applications incluant, entre autres, le Compact Disc, le stockage en mémoire, la radiodiffusion numérique, les systèmes radiomobiles, les radiocommunications militaires, les modems filaires ou radio.

19. [F. Barbaresco] Le Radar utilise, pour améliorer sa résolution distance, la technique de traitement du signal appelée "compression d'impulsion" qui consiste à l'émission à émettre une impulsion modulée linéairement en fréquence sur une une bande de fréquences B et en réception à appliquer le "filtre adapté" (convolution avec une réplique inversée temporellement et conjuguée). La résolution en distance obtenue est alors proportionnelle :

(a) à la bande de fréquences de modulation B,

(b) à l'inverse de la bande de fréquences de modulation B,

(c) à la racine carrée de la bande de fréquences de modulation B.

20. [G. Richard] Le système Dolby Surround est :

(a) un système de spatialisation adapté pour une restitution sur 2 canaux ;

(b) un système de spatialisation adapté pour une restitution sur 4 canaux ;

(c) un système de spatialisation qui nécessite l'utilisation d'au moins 5 canaux ;

(d) un système permettant une haute fidélité audio grâce à un module de compression des signaux audio (codage Dolby AC3).

suite . . .

PARTIE B

On considère un signal aléatoire à temps continu $x(t)$ que l'on suppose réel, centré et stationnaire au sens large. On suppose qu'au cours d'une transmission, un récepteur reçoit le signal $y(t)$ donné par :

$$y(t) = x(t) + \rho x(t-\theta) \tag{1}$$

où ρ et θ sont des constantes réelles. On note $\gamma_x(\tau) \triangleq \mathrm{E}\{x(t)x(t-\tau)\}$ la fonction d'autocorrélation de $x(t)$.

21. Rappeler la définition de la stationnarité au sens large. Calculer $\mathrm{E}\{y(t)\}$ puis la fonction d'autocorrélation de $y(t)$ (notée $\gamma_y(\tau)$) en fonction de celle de $x(t)$. Le signal $y(t)$ est-il stationnaire au sens large ?

22. Exprimer la puissance $\mathrm{E}\{y(t)^2\}$ en fonction de $\gamma_x(0)$ et $\gamma_x(\theta)$.

23. Calculer la densité spectrale de $y(t)$ (notée $\Gamma_y(f)$) en fonction de celle de $x(t)$ (notée $\Gamma_x(f)$).

24. Justifier que $y(t)$ est obtenu par filtrage de $x(t)$. Trouver la réponse en fréquence $H(f)$ du filtre et retrouver l'expression précédente de $\Gamma_y(f)$ à l'aide de la formule des interférences.

25. On suppose que $x(t)$ est un signal bande étroite autour de la fréquence f_0. $y(t)$ est-il également bande étroite ? Pourquoi ?

26. On suppose que $x(t)$ s'écrit $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ où φ est une variable aléatoire équirépartie sur $[0, 2\pi]$. Justifier la stationnarité de $x(t)$ dans ce cas.

PARTIE C

Soit $s(t)$ un signal à bande limitée $[-B, B]$ dont l'allure du spectre est représentée schématiquement sur la figure 1.

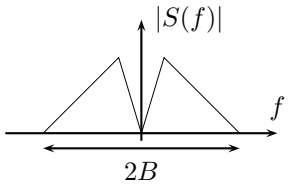


FIG. 1 – Spectre schématique du signal $s(t)$

27. On définit les signaux à temps discret :

$$\forall n : \qquad x_n = s\left(\frac{n}{2B}\right) \qquad z_n = s\left(\frac{n}{4B}\right) \tag{2}$$

Comment s'appelle l'opération qui consiste à recueillir les signaux ci-dessus à partir de $s(t)$? La condition du théorème de Shannon-Nyquist est-t-elle vérifiée pour x_n ? pour z_n ?

28. Tracer l'allure schématique des spectres des signaux à temps discret x_n et z_n (on tracera l'allure des transformées de Fourier à temps discret respectives $X(f)$ et $Z(f)$ sur l'intervalle de fréquences normalisées $[0, 1]$).

29. On définit le signal à temps discret y_n par :

$$\begin{cases} \text{Si } n \text{ est pair } (n = 2p), & y_{2p} = x_p \\ \text{Si } n \text{ est impair } (n = 2p+1), & y_{2p+1} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Calculer la transformée en z de y_n (notée $Y[z]$) en fonction de celle de x_n (notée $X[z]$).

suite ...

30. Quel est le lien entre $Y[z]$ et la transformée de Fourier à temps discret de y_n (notée $Y(f)$) ? En déduire un lien entre $Y(f)$ et $X(f)$. Représenter alors l'allure de $Y(f)$ sur l'intervalle de fréquences normalisées $[0, 1]$).

31. Montrer que par un filtrage passe-bas numérique de y_n, il est possible de retrouver z_n.

32. On souhaite obtenir la formule correspondant à l'interpolation précédemment décrite en fréquence.

(a) Considérer $Z(f)$ sur l'intervalle $[-1/4, 1/4]$, décomposer cette fonction en série de Fourier[2] sur cet intervalle et montrer que cette décomposition s'écrit :

$$Z(f) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} 2z_{2p}e^{-\imath 4\pi pf} \qquad \text{(sur l'intervalle } [-1/4, 1/4])$$

(b) Exprimer z_n en fonction de $Z(f)$ puis en déduire la relation suivante qui exprime z_n en fonction des échantillons pairs :

$$z_n = \sum_{p\in\mathbb{Z}} z_{2p}\text{sinc}\left(\frac{\pi(n-2)}{2}\right)$$

(c) En déduire z_n en fonction des x_n.

[2]Pour une fonction g périodique de période a, on rappelle qu'une écriture de la décomposition en série de Fourier est donnée par $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-\imath 2\pi kx/a}$ avec $c_k = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} g(x)e^{+\imath 2\pi kx/a}\,dx$.

suite: FEUILLE DE REPONSES

Nom: _____

Prénom: _____

PARTIE A

1.

2.

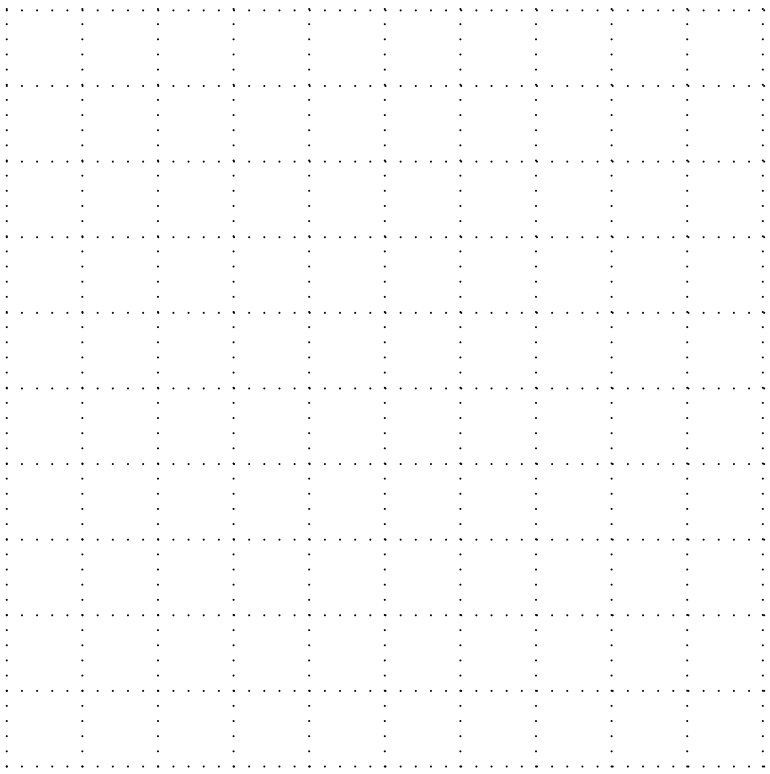
3.

4.

5.

---

suite ...



Entourer les réponses justes.

7.	a	b	c	d
8.	a	b	c	d
9.	a	b	c	d
10.	a	b	c	d
11.	a	b	c	d
12.	a	b	c	d
13.	a	b	c	d
14.	a	b	c	d
15.	a	b	c	d
16.	a	b	c	
17.	a	b	c	
18.	a	b	c	
19.	a	b	c	
20.	a	b	c	d

Telecom - INT

JUIN, 2007
Première session

EXAMEN ÉCRIT DE TRAITEMENT DU SIGNAL (MODULE SI12)

Eléments de correction

PARTIE A

Voir cours/TDs/TPs et conférences.

PARTIE B

21. $\mathrm{E}\{y(t)\} = 0$. $\gamma_y(\tau) \triangleq \mathrm{E}\{y(t)y(t-\tau)\} = (1+\rho^2)\gamma_x(\tau) + \rho(\gamma_x(\tau+\theta) + \gamma_x(\tau-\theta))$

22. $\mathrm{E}\{y(t)^2\} = \gamma_y(0) = (1+\rho^2)\gamma_x(0) + 2\rho\gamma_x(\theta)$

23. $\Gamma_y(f) = [(1+\rho^2) + 2\rho\cos(2\pi\theta f)]\gamma_x(f)$

24. L'équation donnant $y(t)$ en fonction de $x(t)$ est un exemple classique de système linéaire et invariant dans le temps : c'est donc une opération de filtrage et la réponse en fréquence est : $H(f) = 1 + \rho e^{-\imath 2\pi\theta f}$. La relation $\Gamma_y(f) = |H(f)|^2\Gamma_x(f)$ redonne bien l'expression de la question précédente.

25. $y(t)$ est aussi bande étroite : le support du spectre de $y(t)$ est en effet contenu dans celui de $x(t)$ d'après les relations des deux questions précédentes.

26. Voir exercice du poly traité en TD.

PARTIE C

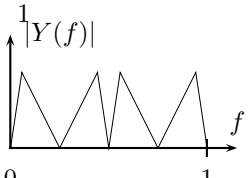
27. Il s'agit d'un échantillonnage. Les conditions du théorème de Shannon-Nyquist sont vérifiées pour x_n et pour z_n. Pour x_n, la fréquence d'échantillonnage est la valeur minimale limite fournie par le théorème d'échantillonnage.

28.



29. $Y[z] = X[z^2]$.

30. $Y(f) = X(2f)$.



31. On constate (graphiquement) que le filtrage passe-bas numérique du motif qui représente $Y(f)$ donne le motif qui représente $Z(f)$.

suite ...

32. (a) Sur l'intervalle $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, $Z(f)$ peut se décomposer :

$$Z(f) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p e^{-\imath 4\pi pf} \tag{1}$$

où, compte tenu du support de $Z(f)$:

$$c_p = 2\int_{-1/4}^{1/4} Z(f)e^{+\imath 4\pi pf}\ df = 2\int_{-1/2}^{1/2} Z(f)e^{+\imath 4\pi pf}\ df = 2z_{2p} \tag{2}$$

D'où le résultat.

(b) En tenant à nouveau compte du support de $Z(f)$:

$$z_n = \int_{-1/2}^{1/2} Z(f)e^{+\imath 2\pi nf}\ df = \int_{-1/4}^{1/4} Z(f)e^{+\imath 2\pi nf}\ df \tag{3}$$

En remplaçant $Z(f)$ par l'expression trouvée sur cet intervalle :

$$z_n = \int_{-1/4}^{1/4} \left(\sum_{p\in\mathbb{Z}} 2z_{2p}e^{-\imath 4\pi pf}\right) e^{+\imath 2\pi nf}\ df = \sum_{p\in\mathbb{Z}} 2z_{2p}\int_{-1/4}^{1/4} e^{-\imath 4\pi pf}e^{+\imath 2\pi nf}\ df \tag{4}$$

En poursuivant le calcul, il vient le résultat demandé :

$$z_n = \sum_{p\in\mathbb{Z}} z_{2p}\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(n-2p)}{2}\right)$$

(c) On a $z_{2p} = x_p$ pour tout entier p et donc d'après la question précédente :

$$z_n = \sum_{p\in\mathbb{Z}} x_p\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(n-2p)}{2}\right)$$

Remarque : L'élève soucieux de rigueur pourra supposer que z_n est sommable et donc dans ℓ^2. Dès lors, (1) est vraie dans $\mathrm{L}^2(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (et non pas pour tout f). (3) exprime alors que compte tenu du support de $Z(f)$ dans $\mathrm{L}^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, on a l'égalité des deux produits scalaires :

$$\langle e^{-\imath 2\pi nf}, Z(f)\rangle_{\mathrm{L}^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = \langle e^{-\imath 2\pi nf}, Z(f)\rangle_{\mathrm{L}^2(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})} \tag{5}$$

Ceci justifie la permutation de la somme et de l'intégrale dans (4).

Telecom - INT

AOÛT, 2007
Deuxième session

EXAMEN ÉCRIT DE TRAITEMENT DU SIGNAL (MODULE SI12)

L'usage des calculatrices, notes de cours ou autres documents, n'est pas autorisé.

(Durée de l'épreuve: 90 minutes)

NOTE:
- Les différentes parties du sujet sont indépendantes.
- Les réponses de la partie A seront données sur la feuille de réponses prévue à cet effet à la fin du sujet. Les parties B et C seront rédigées sur des copies vierges.
- Le barême prévu pour les questions à choix multiple est de +1 point par affirmation juste et -1/2 points par affirmation fausse. Les autres questions valent chacune 1 point environ.
- Dans l'ensemble du sujet: $\imath$ désigne le nombre complexe tel que $\imath^2 = -1$; la conjugaison complexe est indiquée par une étoile ($.^*$) et l'espérance mathématique par $\mathrm{E}\{.\}$.

PARTIE A : Questions de cours et QCM (répondre sur la feuille prévue à cet effet)

Deux ou trois lignes maximum sont demandées dans les questions 1 à 6
(place réservée sur la feuille de réponses).
Pour les questions 8 à 20 de type QCM, indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s)
en entourant les bonnes réponses sur le tableau p.9.

1. Définir ce qu'on appelle un signal quantifié et un signal échantillonné.

2. Comment s'écrit la fonction de transfert en z d'un filtre purement récursif (ou filtre AR : auto-régressif) ? Quelle est la relation correspondante qui permet de calculer la sortie ?

3. Comment se définit la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) d'un signal (temps discret) $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

4. Quel est le lien entre la TFTD définie à la question précédente et la transformée de Fourier discrète (TFD) ? Qu'est-ce que la «FFT» ?

5. Qu'appelle-t-on signal à bande étroite ? Donner un exemple classique.

6. On définit le signal $x(t)$ par :

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_\tau(t - nT)$$

où : $T > \tau$ sont deux réels positifs et Π_τ désigne une porte de largeur τ ($\Pi_\tau(t) = 1$ si $|t| \leq \tau/2$ et 0 sinon). Rappeler le calcul de la transformée de Fourier de ce signal que vous avez étudié en TP.

suite ...

7. On envoie en entrée de l'analyseur de spectre analogique que vous avez manipulé en TP le signal $x(t)$ de la question précédente avec $\tau = 25\mu$s et $T = 10$ms (valeurs du TP). L'analyseur est réglé avec les paramètres suivants :
- `Freq. start` = 0kHz
- `Freq. stop` = 100kHz
- `Res. bandwidth` = 580Hz
- `Sweep time` = 9.83s

Tracer sur la feuille de réponses (p.9) l'allure de la courbe que l'on peut observer à l'analyseur de spectre.

8. Sous le logiciel SCILAB, on suppose avoir chargé dans la variable `x` des échantillons d'un signal prélevés à une fréquence d'échantillonnage de 1kHz.

(a) La commande `plot(fft(x)) ;` trace la représentation graphique de la transformée de Fourier du signal à temps continu $x(t)$ dont proviennent les échantillons.

(b) La commande `plot(fft(x)) ;` trace la représentation graphique du module de la transformée de Fourier du signal à temps continu $x(t)$ dont proviennent les échantillons.

(c) Les commandes `N=length(x) ; plot((1 :N),abs(fft(x))) ;` tracent le module de la transformée de Fourier à temps discret du vecteur `x`. La fréquence réduite (ou normalisée) est indiquée est abscisse.

(d) Les commandes `N=length(x) ; plot((0 :N-1)/N*1000,abs(fft(x))) ;` tracent le module de la transformée de Fourier à temps discret du vecteur `x`. La fréquence réelle est indiquée est abscisse.

9. On considère l'opération qui à un signal à temps continu $x(t)$ associe le signal $y(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_t^{t+\alpha} x(\theta)\, d\theta \qquad \text{avec } \alpha > 0.$$

(a) C'est une opération de filtrage par un filtre non causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} x(\theta) & \text{si } \theta \in [t, t+\alpha] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) C'est une opération de filtrage par un filtre causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} x(\theta) & \text{si } \theta \in [t, t+\alpha] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) C'est une opération de filtrage par un filtre non causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in [-\alpha, 0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(d) C'est une opération de filtrage par un filtre causal dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in [-\alpha, 0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

suite ...

10. Soit $T \in \mathbb{R}_+$ et $p_T(t)$ le signal porte défini par $p_T(t) = 1$ si $t \in [-T/2, T/2]$ et $p_T(t) = 0$ si $t \notin [-T/2, T/2]$. La transformée de Fourier $P_T(f)$ de $p_T(t)$:

(a) n'est pas dérivable car le signal $p_T(t)$ n'est pas continu.

(b) vérifie l'égalité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |P_T(f)|^2 \, df = T$

(c) est à valeurs complexes (et non pas réelles), comme c'est le cas pour toutes les transformées de Fourier.

(d) vaut : $P_T(f) = T \left(\dfrac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2$ si $f \neq 0$ et $P_T(0) = 1$.

11. Soit $x(t)$ un signal à bande limitée, dont le support de la transformée de Fourier est inclus dans $[-B, B]$; soit $h(t)$ la réponse impulsionnelle d'un filtre quelconque. Soit $y(t)$ la sortie de ce filtre excité par $x(t)$.

(a) $y(t)$ est un signal à bande limitée.

(b) si T est une période d'échantillonnage telle que $1/T > 2B$, alors le signal à temps discret $(y(nT))$ coïncide avec la version filtrée de $(x(nT))$, la réponse impulsionnelle du filtre numérique dont il est question étant $(h(nT))$.

(c) puisque $y(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$, on peut toujours écrire, quel que soit $T > 0$:

$$y(nT) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(kT) x(nT - kT)$$

(d) $y(t)$ est un signal causal car obtenu par une opération de filtrage.

12. Soient les signaux à valeurs complexes $x_1(t) = e^{\imath 2\pi f_1 t}$ et $x_2(t) = e^{\imath 2\pi f_2 t}$ où les fréquences f_1 et f_2 valent $f_1 = -418$Hz et $f_2 = 582$Hz. $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont tous deux échantillonnés aux instants $nT_e, n \in \mathbb{Z}$, avec une durée $T_e = 1$ms entre deux échantillons.

(a) La condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist n'est pas vérifiée pour $x_1(t)$ et est vérifiée pour $x_2(t)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $x_1(nT_e) = x_2(nT_e)$.

(b) La condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist est vérifiée pour $x_1(t)$ et n'est pas vérifiée pour $x_2(t)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $x_1(nT_e) = x_2(nT_e)$.

(c) La condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist n'est vérifiée ni pour $x_1(t)$, ni pour $x_2(t)$.

(d) L'affirmation «$x_1(nT_e) = x_2(nT_e)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$» est inexacte car la condition d'échantillonnage de Shannon-Nyquist est vérifiée pour $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

13. Un filtre numérique rationnel défini par sa fonction de transfert en z $H[z]$ ou par sa réponse impulsionnelle $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est stable si et seulement si :

(a) le domaine de convergence de $H[z]$ est du type $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > R\}$, où $R \in \mathbb{R}_+^*$.

(b) les pôles de $H[z]$ sont à partie réelle négative.

(c) la réponse impulsionnelle est bornée (càd il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout n, $|h_n| < M$).

(d) l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ est inclus dans le domaine de convergence de $H[z]$.

suite ...

14. La puissance moyenne d'un signal $x(t), t \in \mathbb{R}$:

(a) est définie par la limite suivante : $\lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt$.

(b) est infinie si l'énergie de $x(t)$ est non nulle.

(c) est nulle lorsque l'énergie de $x(t)$ est finie.

(d) peut être négative dans le cas d'un signal complexe.

15. Soit $x(t)$ un signal déterministe d'énergie finie, $X(f)$ sa transformée de Fourier et $\Gamma_x(f)$ sa densité spectrale d'énergie.

(a) L'énergie de $x(t)$ vaut $\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, df$.

(b) On a : $\forall f \in \mathbb{R} \quad \Gamma_x(f) = |X(f)|$.

(c) $\Gamma_x(f)$ admet toujours une symétrie hermitienne, càd : $\forall f \in \mathbb{R} \quad \Gamma(f) = \Gamma(-f)^*$.

(d) $\Gamma_x(f)$ est toujours maximale en 0.

QCM sur les conférences

Indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s).

16. [J. Boudy] Les coefficients du Cepstre, en particulier les MFCC calculés dans l'étage d'analyse d'un système de Reconnaissance de Parole (ou encore Extraction de paramètres), sont-ils définis :

(a) dans le domaine fréquentiel ?

(b) dans le domaine temporel ?

(c) dans le domaine de Laplace ?

17. [J. Boudy] Un système de reconnaissance de parole (RdP) "Indépendant du locuteur" permettant par exemple de prononcer des chiffres ou des mots de commande usuels isolés est :

(a) un système permettant de vérifier l'identité d'une personne à partir de quelques mots prononcés par elle ;

(b) un système pour lequel il devra effectuer un apprentissage préalable de mots de commandes et de chiffres ;

(c) un système permettant à l'utilisateur de composer automatiquement un numéro de téléphone en l'énonçant vocalement, ceci sans avoir besoin d'effectuer un apprentissage préalable du système de RdP.

18. [P. Mège] Dans un système comme le GSM, pourquoi utilise-t-on une séquence d'apprentissage ?

(a) Pour permettre à la réception la synchronisation des bursts. C'est la seule fonction remplie par cette séquence d'apprentissage.

(b) Pour permettre l'identification du terminal émetteur (sur la voie montante) ou de la cellule émettrice (sur la voie descendante). L'émission d'une telle séquence est obligatoire pour des raisons réglementaires.

(c) Pour estimer les multitrajets de propagation sur une séquence connue à la fois de l'émetteur et du récepteur afin de permettre un traitement d'égalisation ou un traitement équivalent. La séquence d'apprentissage permet également de mettre à jour la synchronisation.

suite ...

19. [F. Barbaresco] La technique radar Doppler consiste à émettre un train d'impulsions. Du fait du théorème d'échantillonnage de Shannon, le radar est ambigu en Doppler, et du fait du temps d'écoute limité entre impulsions émises, le radar est ambigu en distance. Ces deux ambiguïtés ne sont pas indépendantes. Laquelle de ces dépendances lie l'ambiguïté Doppler et l'ambiguïté Distance :

(a) le produit des ambiguïtés Doppler et Distance est constant ;

(b) le rapport des ambiguïtés Doppler et Distance est constant ;

(c) la somme des ambiguïtés Doppler et Distance est constant.

20. [G. Richard] Un ensemble de «filtres de tête» (ou HRTF pour *Head Related Transfer Function*) ont été mesurés pour chaque oreille pour des positions discrètes de l'espace. Ces positions sont situées sur une sphère d'un mètre (1m) de rayon pour 25 valeurs d'azimuth (entre -90° et $+90^o$) et 50 valeurs d'élévation entre -45° et $+230^o$.

(a) Cet ensemble de filtres permet de construire un système de spatialisation des sons pour une écoute sur une enceinte.

(b) Cet ensemble de filtres permet de construire un système de spatialisation des sons pour une écoute au casque.

(c) Cet ensemble de filtres permet de construire un système de spatialisation des sons pour une écoute sur haut-parleurs.

(d) Cet ensemble de filtres permet de construire un système de spatialisation des sons pour une écoute au casque qui sera indépendant de l'auditeur.

PARTIE B

On considère le signal suivant à temps continu :

$$x(t) = a(t)e^{\imath 2\pi f_0 t}$$

où f_0 est une constante et $a(t)$ est un signal à valeurs complexes.

21. On suppose que $a(t)$ est un signal déterministe dont la transformée de Fourier existe et est notée $A(f)$.

(a) $x(t)$ est-il un signal déterministe ou aléatoire ?

(b) Exprimer $X(f)$, la transformée de Fourier de $x(t)$ en fonction de $A(f)$.

(c) Si $a(t)$ est à bande limitée $[-B, B]$, quelle est la bande occupée par $x(t)$?

22. On suppose maintenant que $a(t)$ est un signal aléatoire centré stationnaire au sens large dont la fonction d'autocorrélation est notée $\gamma_a(\tau) \triangleq \mathrm{E}\{a(t)a^*(t-\tau)\}$.

(a) Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$ de $x(t)$ et justifier la stationnarité au sens large de $x(t)$.

(b) Calculer $\Gamma_x(f)$, la densité spectrale de puissance de $x(t)$ en fonction de $\Gamma_a(f)$, densité spectrale de puissance de $a(t)$. Si $a(t)$ est à bande limitée $[-B, B]$ (càd si $\Gamma_a(f)$ est nul en dehors de cette bande), que peut-on dire de $x(t)$?

suite . . .

PARTIE C

Le but de cet partie est d'étudier quelques propriétés simples à la base d'une analyse en sous-bandes.

23. On considère des signaux à temps discret $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Le signal b_n est obtenu à partir de a_n par :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad b_n = a_{2n}$$

Les échantillons pairs uniquement sont conservés ; on parle d'opération de décimation d'un facteur deux, ce que l'on note par le signe $\textcircled{2\downarrow}$. Le signal c_n est obtenu à partir de b_n par :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \begin{cases} c_{2n} = b_n, \\ c_{2n+1} = 0. \end{cases}$$

Cette opération qui consiste à intercaler un zéro entre deux échantillons est notée $\textcircled{2\uparrow}$. L'opération globale est résumée sur le schéma de la figure 1.

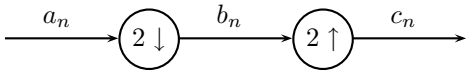


FIG. 1 – Sur- et sous-échantillonnage d'un facteur 2.

D'après la description ci-dessus, que valent les échantillons $b_0, b_1, \ldots, b_9$ et $c_0, c_1, \ldots, c_9$ en fonction des échantillons du signal a_n.

24. Rappeler la définition de la transformée en z d'un signal. Démontrer la relation :

$$C[z] = \frac{A[z] + A[-z]}{2}$$

où $A[z], B[z]$ et $C[z]$ sont les transformées en z respectives de a_n, b_n et c_n.

25. On considère maintenant le système de la figure 2 où $H_0[z], H_1[z], \widetilde{H_0}[z], \widetilde{H_1}[z]$ représentent des fonctions de transfert en z de filtres. En utilisant la question précédente, trouver le lien entre $Y[z]$ et $X[z]$, transformées

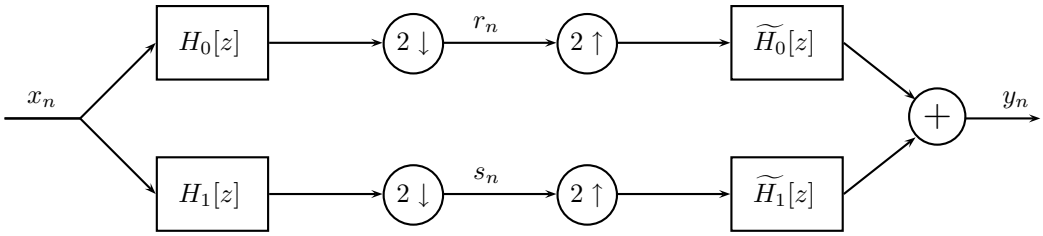


FIG. 2 – Schéma de l'analyse en deux sous-bandes

en z respectives de y_n et x_n.

26. Déduire de la question précédente que l'on retrouve exactement $X[z]$ en sortie du système si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées (on parle alors de reconstruction parfaite du signal x_n) :

$$\begin{cases} H_0[-z]\widetilde{H_0}[z] + H_1[-z]\widetilde{H_1}[z] = 0 & \text{(1a)} \\ H_0[z]\widetilde{H_0}[z] + H_1[z]\widetilde{H_1}[z] = 2 & \text{(1b)} \end{cases}$$

suite ...

27. On choisit dorénavant de se placer dans le cas :

$$\begin{cases} H_1[z] = H_0[-z] \\ \widetilde{H_0}[z] = H_0[z] \\ \widetilde{H_1}[z] = -H_0[-z] \end{cases} \tag{2}$$

Montrer que (1a) est vérifiée et donner la contrainte qu'entraîne la condition (1b) sur $H_0[z]$.

28. On suppose que la réponse impulsionnelle de $H_0[z]$ est paire, càd que cette réponse impulsionnelle vérifie : $\forall n \in \mathbb{Z}, h_n = h_{-n}$.

(a) Justifier que $H_0[z] = H_0[z^{-1}]$ dans ce cas.

(b) En déduire $H_1[z] = H_0[-z^{-1}]$.

(c) Rappeler le lien entre la transformée en z d'une réponse impulsionnelle et la réponse en fréquence. Déduire alors de la question précédente que $H_1(f) = H_0(1/2 - f)$. On parle pour $H_1[z]$ et $H_0[z]$ de filtres miroirs en quadrature.

(d) On suppose que $H_0[z]$ est un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure normalisée 1/4. Tracer schématiquement le module de la réponse fréquentielle de $H_0[z]$ et de $H_1[z]$. Le filtre $H_1[z]$ est-il passe-bas, passe-haut ou passe-bande ?

29. On abandonne l'hypothèse de symétrie de la réponse impulsionnelle de $H_0[z]$. En effectuant le choix (2), il n'existe pas de solution de réponse impulsionnelle finie satisfaisant (1b). On affaiblit cette contrainte en :

$$H_0[z]\widetilde{H_0}[z] + H_1[z]\widetilde{H_1}[z] = 2z^k \tag{3}$$

où k est un entier, $k \geq 1$.

(a) Pour la reconstruction parfaite, que signifie la présence d'une puissance de z dans (3) vis à vis de (1b) ?

(b) Montrer que pour $k = 1$, l'expression $H_0[z] = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + z)$ est une solution. On l'appelle filtre de Haar.

30. Quel peut être l'intérêt d'un système tel que celui de la figure 2 qui permet de décomposer le signal initial en deux signaux r_n et s_n ?

Nom: _____

Prénom: _____

PARTIE A

1.

2.

3.

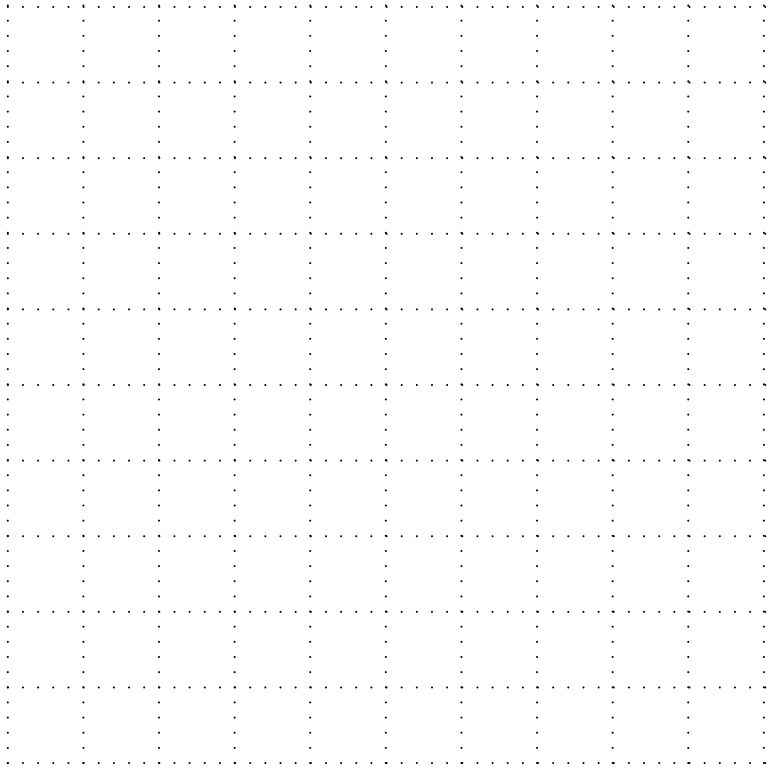
4.

5.

suite ...

6.

7.



Entourer les réponses justes.

8.	a	b	c	d
9.	a	b	c	d
10.	a	b	c	d
11.	a	b	c	d
12.	a	b	c	d
13.	a	b	c	d
14.	a	b	c	d
15.	a	b	c	d
16.	a	b	c	
17.	a	b	c	
18.	a	b	c	
19.	a	b	c	
20.	a	b	c	d

Telecom - INT

AOÛT, 2007
Deuxième session

EXAMEN ÉCRIT DE TRAITEMENT DU SIGNAL (MODULE SI12)

Eléments de correction

PARTIE A

Voir cours/TDs/TPs et conférences.

PARTIE B

21. (a) $x(t)$ est déterministe.

(b) $X(f) = A(f - f_0)$ (propriété de modulation de la transformée de Fourier)

(c) Bande occupée par $x(t)$: $[f_0 - B, f_0 + B]$.

22. (a) $\gamma_x(\tau) = \gamma_a(\tau)e^{\imath 2\pi f_0 \tau}$.

(b) $\Gamma_x(f) = \Gamma_a(f - f_0)$. Si $a(t)$ à bande limitée $[-B, B]$, la bande occupée par $x(t)$ est $[f_0 - B, f_0 + B]$.

PARTIE C

23. $b_0 = a_0, b_1 = a_2, b_2 = a_4, \ldots$ et $c_0 = a_0, c_1 = 0, c_2 = a_2, c_3 = 0, c_4 = a_4, c_5 = 0, \ldots$.

24.

$$C[z] = \sum_n c_n z^{-n} = \sum_p \left(c_{2p} z^{-2p} + c_{2p+1} z^{-(2p+1)} \right) = \sum_p b_p z^{-2p} = B[z^2]$$

$$\begin{aligned} C[z] &= \sum_n c_n z^{-n} = \sum_p \left(c_{2p} z^{-2p} + c_{2p+1} z^{-(2p+1)} \right) = \sum_p a_{2p} z^{-2p} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_p a_{2p} z^{-2p} + \sum_p a_{2p+1} z^{-(2p+1)} + \sum_p a_{2p} (-z)^{-2p} + \sum_p a_{2p+1} (-z)^{-(2p+1)} \right) \\ &= \frac{A[z] + A[-z]}{2} \end{aligned}$$

suite ...

25.

$$\begin{aligned} Y[z] &= \widetilde{H_0}[z]\frac{H_0[z]X[z] + H_0[-z]X[-z]}{2} + \widetilde{H_1}[z]\frac{H_1[z]X[z] + H_1x[-z]X[-z]}{2} \\ &= \frac{\widetilde{H_0}[z]H_0[z] + \widetilde{H_1}[z]H_1[z]}{2}X[z] + \frac{\widetilde{H_0}[z]H_0[-z] + \widetilde{H_1}[z]H_1[-z]}{2}X[-z] \end{aligned}$$

26. La question précédente indique que $Y[z] = X[z]$ lorsque les conditions indiquées sont satisfaites.

27. La première condition est satisfaite et on vérifie que la deuxième devient :

$$H_0[z] - H_0[-z]^2 = 2$$

28. (a) $H_0[z] = \sum_n h_n z^{-n} = \sum_n h_{-n} z^{-n} = \sum_n h_n z^n = H_0[z^{-1}]$

(b) $H_1[z] = H_O[-z] = H_0[-z^{-1}]$

(c) D'après la question précédente $H_1[e^{\imath 2\pi f} = H_0[e^{\imath\pi - \imath 2\pi f}]$ d'où $H_1(f) = H_0(1/2 - f)$.

(d) Si $H_0[z]$ est passe-bas idéal de fréquence de coupure normalisée $1/4$, $H_1[z]$ est passe-haut idéal, même fréquence de coupure.

29. (a) La reconstruction parfaite est souhaitée à un retard près.

(b) Vérification facile.

30. Décomposition et codage en deux sous-bandes : l'une contenant plutôt les basses fréquences et l'autre les hautres fréquences.

Telecom - INT

JUIN, 2008
Première session

EXAMEN ÉCRIT DE TRAITEMENT DU SIGNAL (MODULE SIC3501)

L'usage des calculatrices, notes de cours ou autres documents, n'est pas autorisé.

(Durée de l'épreuve: 90 minutes)

NOTE:
- Les différentes parties du sujet sont indépendantes.
- Les réponses de la partie A seront données sur la feuille de réponses prévue à cet effet à la fin du sujet. Les parties B et C seront rédigées sur des copies vierges.
- Le barême prévu pour les questions à choix multiple est de +1 point par affirmation juste et -1/2 points par affirmation fausse. Les autres questions valent chacune 1 point environ.
- Dans l'ensemble du sujet: $\imath$ désigne le nombre complexe tel que $\imath^2 = -1$; la conjugaison complexe est indiquée par l'étoile $.^*$ en exposant, la transposition et conjugaison complexe par un $.^H$ en exposant.

PARTIE A : Questions et QCM sur les cours/TDs/TPs (répondre sur la feuille prévue à cet effet)

Deux ou trois lignes maximum sont demandées dans les questions 1 à 6
(place réservée sur la feuille de réponses).
Pour les questions 7 à 20 de type QCM, indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s)
en entourant les bonnes réponses sur le tableau p.8.

1. Quelle est la définition de l'intercorrélation $\gamma_{xy}(\tau)$ de deux signaux déterministes, à temps continu et de puissance finie (non nulle) ?

2. Comment se définit la densité spectrale de puissance pour un signal aléatoire ? Quel est le lien entre puissance et densité spectrale de puissance ?

3. Qu'est-ce qu'un bruit blanc ? On précisera ce que valent la densité spectrale et l'autocorrélation d'un bruit blanc.

4. Comment se définit un filtre en traitement du signal ? Si $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre à temps discret, quelle est la relation entrée-sortie correspondante ?

5. Qu'est-ce que le procédé de modulation ? Préciser si les signaux appelés porteuse et modulante sont haute ou basse fréquence.

suite . . .

6. On définit le signal $x(t)$ par :

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Pi_\tau(t - nT)$$

où : $T > \tau$ sont deux réels positifs et Π_τ désigne une porte de largeur τ ($\Pi_\tau(t) = 1$ si $|t| \leq \tau/2$ et 0 sinon). Rappeler le calcul de la transformée de Fourier de ce signal que vous avez étudié en TP.

7. On envoie en entrée de l'analyseur de spectre que vous avez manipulé en TP le signal $x(t)$ de la question 6 avec $\tau = 25\mu$s et $T = 10$ms (valeurs du TP). L'analyseur est réglé avec les paramètres suivants :
- `Freq. center` $= 20$kHz
- `Freq. span` $= 1$kHz
- `Res. bandwidth` $= 9.1$Hz
- `Sweep time` $= 6.55$s

Tracer sur la feuille de réponses (p.8) l'allure de la courbe que l'on peut observer à l'analyseur de spectre (avec une échelle linéaire en ordonnée).

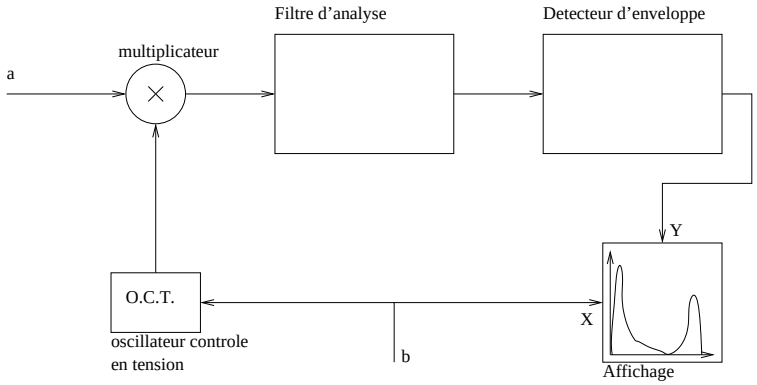


FIG. 1 – Schéma de principe d'un analyseur de spectre (incomplet)

8. La figure 1 représente un schéma de principe incomplet d'un analyseur de spectre tel que celui que vous avez manipulé en TP.

(a) Il s'agit d'un analyseur de spectre numérique.

(b) Il s'agit d'un analyseur de spectre numérique, mais sur le schéma n'a pas été représentée l'opération d'échantillonnage.

(c) Il s'agit d'un analyseur de spectre analogique.

(d) Il s'agit d'un analyseur de spectre à FFT (Fast Fourier Transform).

9. Le filtre d'analyse représenté sur la figure 1 du schéma de principe d'un analyseur de spectre :

(a) est de type passe-bas ;

(b) est de type passe-haut ;

(c) est de type passe-bande ;

(d) est de l'un des types ci-dessus en fonction de l'analyse que l'on souhaite effectuer.

suite ...

10. Soit $x(t)$ un signal à temps continu et valeurs réelles, $z_x(t)$ son signal analytique associé, $\widehat{x}(t)$ sa transformée de Hilbert et $\xi_x(t)$ son enveloppe complexe.

(a) $z_x(t)$ est à valeurs réelles car son spectre ne contient que des fréquences positives, les seules qui aient un sens physique.

(b) $\xi_x(t)$ est à valeurs complexes tandis que $z_x(t)$ est à valeurs réelles.

(c) Le signal $x(t)$ est la partie réelle de $z_x(t)$ et $\widehat{x}(t)$ est la partie imaginaire de $z_x(t)$.

(d) $\widehat{x}(t)$ ne peut pas être la partie imaginaire de $z_x(t)$ car $\widehat{x}(t)$ est un signal à valeurs complexes.

11. On souhaite tracer sous Matlab la courbe de la fonction $t \mapsto e^{-t}\sin(2\pi t)$ pour $t \in [-2, 2]$. Laquelle de ces suites d'instructions Matlab permet-elle d'obtenir un tracé d'allure correcte ?

(a)
```
plot(exp(-t)*sin(2*pi*t),t=[-2..2]) ;
```

(b)
```
t = [-2 :0.05 :2] ; x = (exp(-t)*sin(2*pi*t)) ; plot(t,x) ;
```

(c)
```
t = [-2 :0.05 :2] ; x = (exp(-t).*sin(2*pi*t)) ; plot(t,x) ;
```

(d)
```
for t=-2 :0.01 :2,
plot(exp(-t).*sin(2*pi*t)) ;
end ;
```

12. Sous le logiciel MATLAB, on entre les commandes suivantes : `t = (1 :512) ; x = cos(2*pi*0.25*t) ; X = fft(x) ;`

(a) La variable `x` est un vecteur de taille 512 qui contient des échantillons d'une sinusoïde de fréquence 0.25 échantillonnée à la période 1.

(b) La commande `plot(t,abs(X))` permet de tracer le module de la transformée de Fourier discrète de `x` en fonction de la fréquence normalisée.

(c) La commande `plot(t/512,abs(X))` affiche le module de la transformée de Fourier discrète de `x` en fonction de la fréquence normalisée.

(d) La commande `plot(fft(X))` affiche le le module de la transformée de Fourier discrète de `x` en fonction de la fréquence normalisée.

13. Sous le logiciel MATLAB, on suppose avoir chargé dans la variable `x` des échantillons d'un signal prélevés à une fréquence d'échantillonnage de 1kHz.

(a) Les commandes `N=length(x) ; plot((1 :N),abs(fft(x))) ;` tracent le module de la transformée de Fourier à temps discret du vecteur `x`. La fréquence réduite (ou normalisée) est indiquée est abscisse.

(b) Les commandes `N=length(x) ; plot((0 :N-1)/N,abs(fft(x))) ;` tracent le module de la transformée de Fourier à temps discret du vecteur `x`. La fréquence réduite (ou normalisée) est indiquée est abscisse.

(c) Les commandes `N=length(x) ; plot((0 :N-1)/N*1000,abs(fft(x))) ;` tracent le module de la transformée de Fourier à temps discret du vecteur `x`. La fréquence réduite (ou normalisée) est indiquée est abscisse.

(d) Les commandes `N=length(x) ; plot((0 :N-1)/N*1000,abs(fft(x))) ;` tracent le module de la transformée de Fourier à temps discret du vecteur `x`. La fréquence réelle est indiquée est abscisse.

suite ...

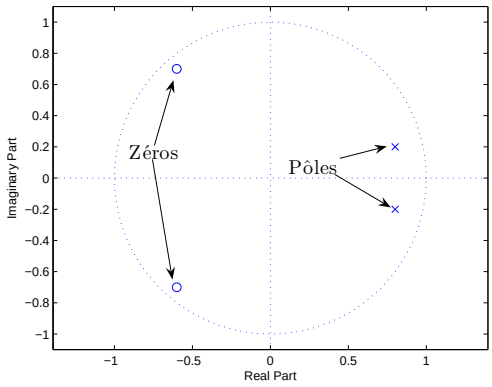


FIG. 2 – Pôles et zéros dans le plan complexe du filtre des questions 14 et 15

14. On considère le filtre causal dont la transformée en z est donnée par :

$$H[z] = \frac{0,85z^{-2} + 1,2z^{-1} + 1}{0,68z^{-2} - 1,6z^{-1} + 1} \tag{1}$$

Ses zéros et pôles sont représentés sur la figure 2 :

(a) le filtre $H[z]$ est de type passe-bas.

(b) le filtre $H[z]$ est de type passe-bande.

(c) le filtre $H[z]$ est de type passe-haut.

(d) il est impossible d'avoir la moindre idée du comportement de ce filtre à partir des éléments donnés.

15. On considère le même filtre qu'à la question 14.

(a) indépendamment des zéros, le filtre $H[z]$ est stable car ses pôles sont de module inférieur à 1.

(b) indépendamment des pôles, le filtre $H[z]$ est stable car ses zéros sont de module inférieur à 1.

(c) le filtre $H[z]$ est stable car ses zéros sont à partie réelle négative.

(d) le filtre $H[z]$ est instable car ses pôles sont à partie réelle positive.

QCM sur les conférences

Indiquer la ou *les* bonne(s) réponse(s).

16. [F. Barbaresco] L'onde électromagnétique rétrodiffusée par les objets est d'amplitude maximale, si la dimension des objets est d'une dimension égale :

(a) à la demie longueur d'onde.

(b) à la longueur d'onde.

(c) à deux fois la longeur d'onde.

suite . . .

17. [F. Barbaresco] Quelle est la nouvelle politique du groupe THALES pour favoriser les thèses ?

(a) Envoyer les thésards un an dans une des filliales à l'étranger du groupe Thales.

(b) Compléter le salaire pour le mettre au niveau d'un jeune ingénieur embauché.

(c) Tenir compte des 3 années de thèses en ancienneté en cas d'embauche du thésard.

(d) Financer des formations complémentaires au thésard pour faciliter son insertion professionnelle.

18. [P. Mège] En présence de réflexions longues de propagation, la distorsion observée sur le canal de propagation est :

(a) de l'interférence inter-symbole (ISI) due à l'étalement temporel du canal.

(b) du fading plat (flat fading) dû à l'étalement fréquentiel du canal (étalement Doppler) et de plus de l'interférence inter-porteuses (ICI) si l'on est en transmission multi-porteuses.

(c) des erreurs aléatoirement disposées dues à la collision entre les différents trajets de propagation.

19. [L. Fathi] Pour augmenter le débit de transmission (bits/s) d'un un système CDMA, il faut :

(a) Augmenter le facteur d'étalement.

(b) Choisir des modulations d'ordre supérieur.

(c) Allouer plusieurs codes au même utilisateur simultanément.

(d) Réduire le temps symbole.

20. [J. Boudy] Critère le plus couramment utilisé pour la phase de reconnaissance (ou de décodage par les modèles de Markov pré-appris) :

(a) Maximum de Vraisemblance : Max {P(O/M)}

(b) Maximum a Posteriori (MAP) : Max {P(M/O)}

(c) Maximum d'Entropie : Max {-P(M/O).LogP(M/O)}

PARTIE B

On considère le signal à temps continu $x(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \phi) + b(t)$ où a et f_0 sont des constantes réelles, ϕ est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ et $b(t)$ est un bruit blanc (centré) dont la densité spectrale est notée $\frac{N_0}{2}$. Les deux processus $a\cos(2\pi f_0 t + \phi)$ et $b(t)$ sont supposés indépendants.

21. Montrer que le signal $x(t)$ est stationnaire au sens large et calculer sa fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau), \tau \in \mathbb{R}$.

22. Calculer $\Gamma_x(f)$ la densité spectrale de puissance du signal $x(t)$.

23. Le signal $x(t)$ est appliqué en entrée d'un filtre dont la réponse fréquentielle vaut :

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f \in [f_0 - B/2, f_0 + B/2] \cup [-f_0 - B/2, -f_0 + B/2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

Calculer la puissance du signal $y(t)$ en sortie du filtre.

PARTIE C

Cet exercice redémontre quelques propriétés de la transformée de Fourier discrète (TFD) et introduit à partir de celle-ci la transformée en cosinus discrète qui est très utilisée dans les algorithmes de compression d'images (normes JPEG, MPEG,...).

suite ...

24. On considère les N échantillons $(x_n)_{n=0,\dots,N-1}$ d'un signal à temps discret de durée finie. On rappelle que la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de $(x_n)_{n=0,\dots,N-1}$ s'exprime par la somme (ici finie) :

$$X(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\imath 2\pi k f} \tag{3}$$

On notera $(X_n)_{n=0,\dots,N-1}$ la TFD de $(x_n)_{n=0,\dots,N-1}$.

(a) Rappeler comment la TFD s'interprète comme les valeurs de la TFTD en N points de l'intervalle unité. Donner l'expression de $(X_n)_{n=0,\dots,N-1}$. Montrer que l'on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \mathbf{W} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

où $\mathbf{W}$ est la matrice $\mathbf{W} = (w^{(k-1)(l-1)})_{k,l=1,\dots,N}$, avec $w \in \mathbb{C}$ à préciser.

(b) Calculer $\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathrm{H}}$. En déduire le lien entre $\sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2$ et $\sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$ ainsi que la formule de la TFD inverse.

25. A partir de maintenant, on pose $N = 2P$ et on suppose que $(x_n)_{n=0,\dots,2P-1}$ est réel. Quelle relation de symétrie cela entraîne-t-il pour les coefficients X_k ?

26. On fait l'hypothèse supplémentaire que $\forall n \in \{0,\dots,2P-1\} \qquad x_{2P-1-n} = x_n$.
Montrer que cela permet d'écrire :

$$\forall k \in \{0,\dots,P\} \qquad \exp\left(-\imath \frac{\pi k}{2P}\right) X_k = A_k \tag{5}$$

où $A_k \in \mathbb{R}$ est à préciser.

27. Que vaut X_P ?

28. En déduire que $\forall n \in \{0,\dots,P-1\}, \qquad x_n = \frac{1}{P}\left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{P-1} A_k \cos\left(\frac{\pi k}{P}(n+\frac{1}{2})\right)\right)$.

29. La transformée en cosinus discrète de $(x_n)_{n=0,\dots,P-1}$ est définie par les coefficients $(\widetilde{A}_k)_{k=0,\dots,P-1}$ tels que :

$$\widetilde{A}_k = \begin{cases} \frac{A_0}{2\sqrt{P}} & \text{si } k = 0, \\ \frac{A_k}{\sqrt{2P}} & \text{si } k \in \{1,\dots,P-1\}. \end{cases} \tag{6}$$

Vérifier que cette transformation conserve l'énergie du signal, çàd que $\sum_{n=0}^{P-1} x_n^2 = \sum_{k=0}^{P-1} \widetilde{A}_k^2$.

suite: FEUILLE DE REPONSES

Nom: _____

Prénom: _____

PARTIE A

1.

2.

3.

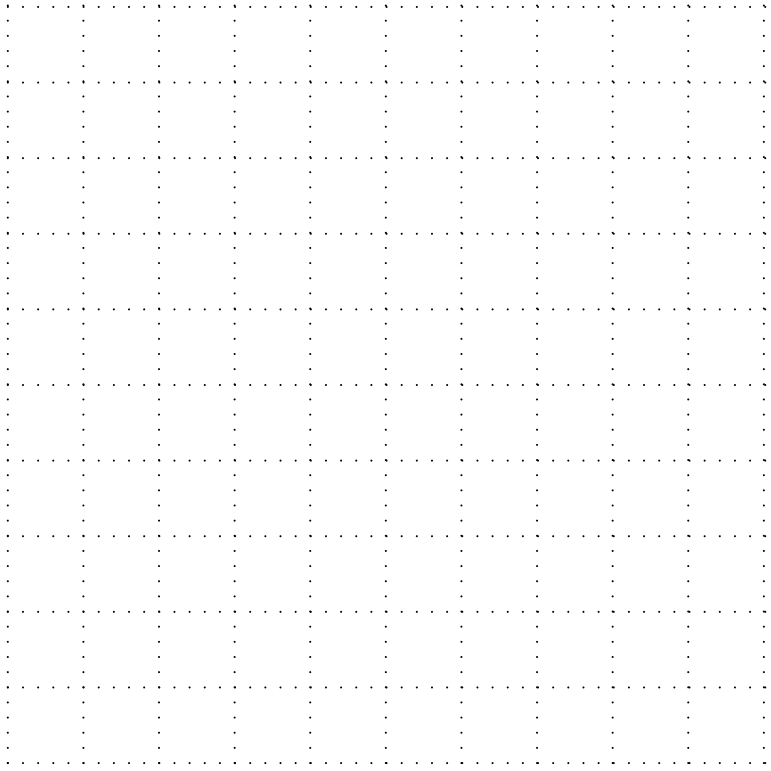
4.

5.

suite ...

6.

7.



Entourer les réponses justes.

8.	a	b	c	d
9.	a	b	c	d
10.	a	b	c	d
11.	a	b	c	d
12.	a	b	c	d
13.	a	b	c	d
14.	a	b	c	d
15.	a	b	c	d
16.	a	b	c	
17.	a	b	c	d
18.	a	b	c	
19.	a	b	c	d
20.	a	b	c	

Telecom - INT

JUIN, 2008
Première session

EXAMEN ÉCRIT DE TRAITEMENT DU SIGNAL (MODULE SIC3501)

Eléments de correction

PARTIE A

Voir cours/TDs/TPs et conférences.

PARTIE B

21. En utilisant l'indépendance des termes croisés et le fait que le bruit est centré, il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\{x(t)x(t-\tau)\} &= \mathrm{E}\{a^2\cos(2\pi f_0 t+\phi)\cos(2\pi f_0(t-\tau)+\phi)\}+\mathrm{E}\{b(t)b(t-\tau)\}\\ &= \mathrm{E}\{\frac{a^2}{2}\big(\cos(4\pi f_0(t-\tau/2)+2\phi)+\cos(2\pi f_0\tau)\big)\}+\mathrm{E}\{b(t)b(t-\tau)\}\end{aligned}$$

ϕ étant uniformément distribuée sur $[0,2\pi]$ et $b(t)$ étant blanc, le signal est stationnaire de fonction d'autocorrélation :

$$\gamma_x(\tau)=\frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)+\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

22. La densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de l'expression précédente :

$$\Gamma_x(f)=\frac{a^2}{4}\left(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right)+\frac{N_0}{2}$$

23. En notant $\Gamma_y(f)$ la densité spectrale de $y(t)$, la puissance s'écrit :

$$P_y=\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_y(f)\,df=\int_{-f_0-B/2}^{-f_0+B/2}\Gamma_x(f)\,df+\int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2}\Gamma_x(f)\,df=\frac{a^2}{2}+BN_0$$

suite ...

PARTIE C

24. Voir cours.

25. Pour tout $k \in \{1, \ldots, 2P-1\}$:

$$X_{2P-k} = \sum_{j=0}^{2P-1} x_j e^{-\imath 2\pi \frac{j(2P-k)}{2P}} = \sum_{j=0}^{2P-1} x_j e^{\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} = \left(\sum_{j=0}^{2P-1} x_j^* e^{-\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} \right)^* = \left(\sum_{j=0}^{2P-1} x_j e^{-\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} \right)^* = X_k^*$$

26. Pour tout $k \in \{0, \ldots, P\}$:

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{j=0}^{P-1} x_j e^{-\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} + \sum_{j=P}^{2P-1} x_j e^{-\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} = \sum_{j=0}^{P-1} x_j e^{-\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} + \sum_{l=0}^{P-1} x_{2P-1-l} e^{-\imath 2\pi \frac{(2P-1-l)k}{2P}} \\ &= \sum_{j=0}^{P-1} x_j \left(e^{-\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} + e^{-\imath 2\pi \frac{(2P-1-j)k}{2P}} \right) = \sum_{j=0}^{P-1} x_j \left(e^{-\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} + e^{\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} e^{\imath 2\pi \frac{k}{2P}} \right) \\ &= e^{\imath \pi \frac{k}{2P}} \sum_{j=0}^{P-1} x_j \left(e^{-\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} e^{-\imath \pi \frac{k}{2P}} + e^{\imath 2\pi \frac{jk}{2P}} e^{\imath \pi \frac{k}{2P}} \right) = e^{\imath \pi \frac{k}{2P}} \sum_{j=0}^{P-1} 2x_j \cos\left(\frac{\pi k}{P}(j + \frac{1}{2}) \right) \end{aligned}$$

et donc $\forall k \in \{0, \ldots, P\}, e^{-\imath \pi \frac{k}{2P}} X_k = A_k \in \mathbb{R}$ avec $A_k = \sum_{j=0}^{P-1} 2x_j \cos\left(\frac{\pi k}{P}(j + \frac{1}{2})\right)$

27. $X_P = 0$.

28. Puisque $X_P = 0$, on a pour tout $n \in \{0, \ldots, P-1\}$:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2P} \sum_{k=0}^{2P-1} X_k e^{\imath 2\pi \frac{kn}{2P}} = \frac{1}{2P} X_0 + \frac{1}{2P} \sum_{k=1}^{P-1} X_k e^{\imath \pi \frac{kn}{P}} + \frac{1}{2P} \sum_{k=P+1}^{2P-1} X_k e^{\imath \pi \frac{kn}{P}} \\ &= \frac{1}{2P} X_0 + \frac{1}{2P} \sum_{k=1}^{P-1} \left(X_k e^{\imath \pi \frac{kn}{P}} + X_{2P-k} e^{\imath \pi \frac{(2P-k)n}{P}} \right) = \frac{1}{2P} X_0 + \frac{1}{2P} \sum_{k=1}^{P-1} \left(X_k e^{\imath \pi \frac{kn}{P}} + X_k^* e^{-\imath \pi \frac{kn}{P}} \right) \\ &= \frac{A_0}{2P} + \frac{1}{2P} \sum_{k=1}^{P-1} \left(A_k e^{\imath \pi (\frac{kn}{P} + \frac{k}{2P})} + A_k e^{-\imath \pi (\frac{kn}{P} + \frac{k}{2P})} \right) = \frac{1}{P} \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{P-1} A_k \cos\left(\frac{\pi k}{P}(n + \frac{1}{2}) \right) \right] \end{aligned}$$

29.

$$\sum_{k=0}^{P-1} \widetilde{A}_k^2 = \frac{1}{2P} \left[\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{P-1} A_k^2 \right] = \frac{1}{2P} \left[\frac{|X_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{P-1} |X_k|^2 \right] = \frac{1}{4P} \sum_{k=0}^{2P-1} |X_k|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2P-1} x_n^2 = \sum_{k=0}^{P-1} x_n^2$$

a structure de l'entreprise :

ture de fait, en soleil : elle se crée au fur et à mesure de la croiss
eprise mais il arrive une saturation de la DG qui est submergée par les
nes -> bien pour démarrer mais il faut vite changer
tructure fonctionnelle ; structure très rationnelle mais très peu motivante,
t très loin de la réalité de l'entreprise, et c'est une logique peu souple.
structure divisionnelle / divisionnaire : structure selon les types
activités, les clients (private, corporate), technologies très flexibles, très
otivants, mais on peut avoir des personnes qui font la même chose :
edondance.
Une structure matricielle : comme avant on privilégie plusieurs critères.
Une structure en réseau : -pathologies.
-clients.
-technologies.
Ne sont pas privilégiés : toutes sur le même plan avec des inter-relations.





IV- Spécifier le niveau d' autorité va-t-on promouvoir dans la
ure :

utorité hiérarchique : elle marche bien vers le bas mais pas vers le haut.
cage et modification). Les postes sont précis, mais on est loin de la réalité
autres postes. Il faut une adéquation entre le poste et les qualifications sinon
lel. Beaucoup de contestations à tous les niveaux -> baisse d' optimisation.
: majoritaire mais en perte de vitesse.
utorité spécialisée : peu de niveau, très précis, mais très stressante ->
lème physique. Problème de décision car tout le monde donne son avis.
utorité partagée (staff and line) on le veut en poupe en ce moment pour les
des entreprises.

3.1- Problème
3.2- Courbe de vie d
3.3- Innovation
3.4-

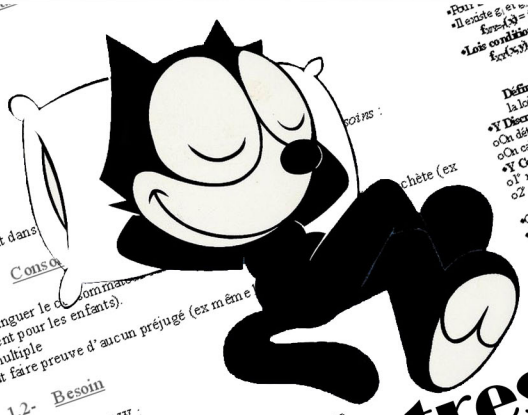
2 notions interviennent dans

1.1- Consom

Il faut distinguer le c
les parents achètent pour les enfants).
Notion multiple
Il ne faut faire preuve d' aucun préjugé (ex même

1.2- Besoin

Le sociologue MASLOW :
Il y a 5 catégories de besoin :
✓ Survie :se nourrir, logement…
✓ Sécurité
✓ Appartenance : se sentir comme appartenant à un groupe



Gare au stress

Enonces d'exercices

Déterminer à partir de $|H(f)|^2$ la moyenne $E[b'(t)]$ du bruit de sortie $b'(t)$.

2 - On suppose maintenant le bruit centré ($E[b(t)] = 0$) et de fonction d'autocorrélat

$$\gamma_{bb}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau).$$

achant que $TF[\Lambda_{2T}(t)] = \frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi^2 f^2 T}$, déterminer la fonction d'autocorrélat

sortie $b'(t)$. En déduire la puissance $P_{b'}$ du bruit de sortie.

- Sans passer par le domaine temporel, retrouver la valeur de $P_{b'}$.

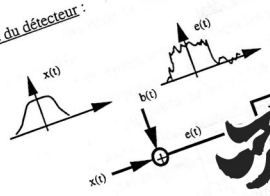
xercice VI.6 Filtre adapté

n considère la transmission par tout ou rien d'un signal de durée finie
umis à un bruit additif $b(t)$ supposé blanc de DSP $S_b(f) = \frac{N_0}{2}$. On a

(t).
n se propose de déterminer le "meilleur traitement linéaire" pour dé
bscence du signal.

n rencontre notamment cette situation :
en radar où la présence (ou l'abscence) de l'écho est liée à présen
en transmission numérique où l'eb "1" pourra être représenté p
nsion pendant T et l'eb "0" par son absence.

rincipe du détecteur :





2-Origines de l'investissement :
Il y a quatre origines majeures possibles pour l'investissement:

- L'entreprise possède des moyens financiers.
- Les marchés ont tendance à croître, mais on est obligé de suivre le marché car c'est vital pour l'entreprise afin de répondre aux besoins de l'entreprise.
- Les pouvoirs publics nous obligent des fois à respecter certaines normes.
- Modification substantielle sur le marché des facteurs de production.

3-Financements de l'investissement :
MBA= marge brut d' autofinancement= capacité d' autofinancement= bénéfice d' activité après IS + montant des dotations aux amortissements et aux provisions +ou – cessions d' actifs – dividendes versés aux actionnaires ou associés.
L'entreprise peut fonctionner au début avec l' autofinancement réel.
Il y a deux possibilités pour les financements externes :

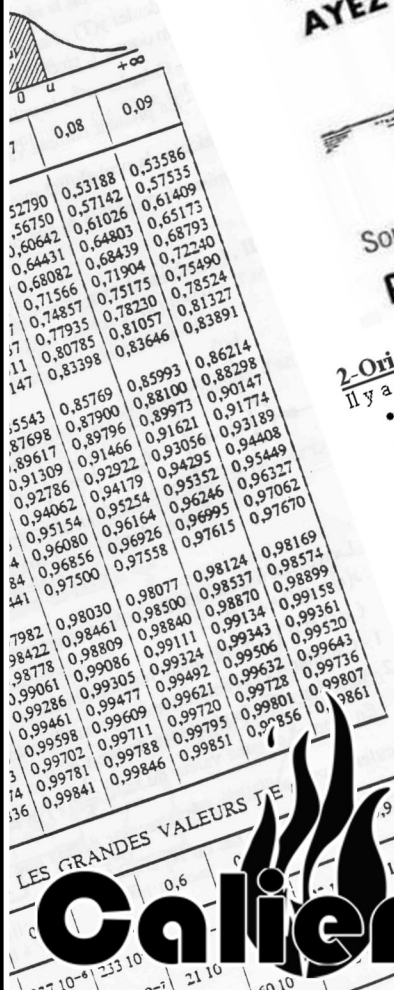
- S' adresser aux actionnaires ou au marché boursier.
- Demander aux banques de prêter de l' argent.

On peut aussi combiner les différentes méthodes de financements.
Ce choix va dépendre de l' environnement économique.

4-Représentation théorique :
On peut représenter sur un système d' axes le taux de rentabilité en fonction du volume d' investissement. Ce type de représentation schématique de l' entreprise est très difficile à faire parce que :
-Quand on effectue un investissement, on ne peut pas prévoir le taux de rentabilité qui sera engendré.
Il y a des investissements interdépendants.

- Pour déterminer le filtre optimum instant T, en sortie du filtre soit :

$\rho =$ ssant



Caliente